

Федеральная служба по гидрометеорологии  
и мониторингу окружающей среды  
(РОСГИДРОМЕТ)

**О.Д. Сиротенко**

**ОСНОВЫ  
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ  
МЕТЕОРОЛОГИИ**

**Том II**

**МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ И ПРОГНОЗОВ  
В АГРОМЕТЕОРОЛОГИИ**

**Книга 1**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АГРОМЕТЕОРОЛОГИИ**

*Допущено*

*Учебно-методическим объединением по образованию  
в области гидрометеорологии в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению «Гидрометеорология»  
и специальностям «Метеорология» и «Агрономия»*

**Под редакцией**

**доктора географических наук, профессора,  
заслуженного метеоролога Российской Федерации  
А.Д. Клещенко**

**и доктора биологических наук, профессора,  
заслуженного метеоролога Российской Федерации  
И.Г. Грингофа**

Обнинск  
2012

УДК 630: 551.5 (075)

**О.Д. Сиротенко.** Основы сельскохозяйственной метеорологии. Том II. Методы расчетов и прогнозов в агрометеорологии. Книга 1. Математические модели в агрометеорологии. **Обнинск: ФГБУ «ВНИИГМИ-МЦД», 2012. – 136 с.**

**ISBN 978–5–901579–33–6 (Обнинск, ФГБУ «ВНИИГМИ-МЦД»)**

**ISBN 978–5–8493–0196–9 (том II, книга 1)**

**Рецензенты:**

*профессор кафедры земледелия и агрометеорологии Российского государственного аграрного университета – Московской сельскохозяйственной академии им. К.А. Тимирязева, доктор сельскохозяйственных наук А.И. Белолюбцев;*

*профессор кафедры географии Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского, главный научный сотрудник ФГБУ «ВНИИГМИ-МЦД» Росгидромета, доктор географических наук В.А. Семенов.*

Учебное пособие содержит семь глав. Рассматривается методология построения моделей «погода–урожай», включая проблему поиска наилучшего набора предикторов.

Представлены примеры построения моделей с ограничениями на параметры, модели гребневой регрессии, модели компонентного анализа для преодоления многомерности описания климатических условий. Анализируются возможности теории робастности, позволяющей для задач множественной регрессии углубить понимание результатов и повысить эффективность решений.

Представлены фундаментальные модели продукционного и деструкционного процессов, которые обеспечивают утилизацию лучистой энергии Солнца, синтез органических веществ и разложение поступивших в почву органических веществ, замыкая биосферный цикл углерода.

Рассматриваются физико-статистические и динамические модели как математический аппарат для параметризации систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих продуктивность агроэкосистем. Представляются методы использования динамических моделей для управления, мониторинга и прогнозирования урожая.

Рассматриваются биосферные модели мониторинга составляющих водного и углеродного балансов пахотных почв для целей многолетнего ретроспективного анализа продуктивности и устойчивости сельского хозяйства.

Представляются математические модели для оптимизации размещения и структуры посевных площадей на основании прогнозов урожайности.

Излагаются методы анализа агроклиматической информации в условиях изменяющегося климата. Представлена система мониторинга изменений климата и модели для оценки их последствий.

Учебное пособие рассчитано на студентов гидрометеорологических и географических факультетов университетов и сельскохозяйственных вузов, а также на учащихся гидрометеорологических техникумов Росгидромета по специальностям «Гидрометеорология» и «Агрономия». Учебное пособие может быть полезно специалистам сельскохозяйственного профиля и экологам.

**ISBN 978–5–901579–33–6**

**ISBN 978–5–8493–0196–9**

The manual consists of seven chapters. The methodology of «weather-yield» model-building is examined, including the problem of finding an optimal set of predictors.

Several examples are presented on model-building with restrictions in parameters, models of ridge regression, models of componential analysis to cover the multiversity of climatic conditions description. The possibilities of robustness theory are analyzed, which allows to extend the understanding and improve efficiency for multiple regression problems.

Fundamental models of productional and destructional processes are presented, which ensure the utilization of solar energy, synthesis of organic matter and decomposition of organic matter in the soil, thus completing the biospheric cycle of carbon.

Physico-statistical and dynamic models are examined as a mathematical apparatus for parameterization of non-linear differential equation systems, describing the productivity of agricultural systems. The methods of utilization of dynamic models for yield management, monitoring and forecasting are presented.

Biospheric models of monitoring of water and carbon balance in arable soils are examined for perennial retrospective analysis of productivity and sustainability of agriculture.

Mathematical models for optimization of placement and structure of cultivation areas based on productivity forecasts are presented.

The methods of agroclimatical information analysis in changing climate are explained. A monitoring system for climate change and models for the evaluation of its consequence are presented.

The manual is designed for the students of hydrometeorological and geographical faculties of universities and agricultural high schools as well as the students of secondary special schools, trained on specialties of «Hydrometeorology» and «Agronomy». The manual might be used by the specialists in agriculture and ecologists.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Конечная цель всякого исследования или научного анализа состоит в нахождении связей (зависимостей) между переменными. Не существует иного способа представления знания, кроме как в терминах количественных или качественных зависимостей между изучаемыми переменными. Агрометеорология как научная дисциплина экологического профиля занята изучением связей между состоянием и продуктивностью сельскохозяйственных культур и метеорологическими переменными, представляющими погодные и климатические условия. Применяемый в этих исследованиях математический аппарат вплоть до последних десятилетий ограничивался методами статистического анализа. Заметим, что попытки решения такой агрометеорологической задачи, как прогноз урожая, статистическими методами предпринимались еще в XV веке. Агрометеорологической проблематикой занимался известный английский математик Р. Фишер. Широкому применению статистического анализа в агрометеорологических исследованиях способствовали работы В.М. Обухова, Е.С. Улановой и др.

Компьютерная революция расширила и углубила возможности статистического моделирования во всех областях науки, включая агрометеорологию. В настоящее время практически сняты ограничения на объем и сложность проводимых вычислений. Доступность компьютерной техники, оснащенной пакетами статистических программ, позволяет при минимальной математической подготовке исследователя проводить обширные расчеты с помощью достаточно сложных статистических методов. Это определяет широкие перспективы для развития методов агрометеорологического прогнозирования, и в частности для развития методов мониторинга и прогнозирования урожайности. Значительную роль здесь могут сыграть последние достижения в области прикладного регрессионного анализа (компонентного, гребневого, робастного и др.). В то же время на практике часто применяются традиционные, иногда устаревшие, далекие от реальности подходы и методы.

Процесс математизации знаний в агрометеорологии не ограничивается более широким и глубоким использованием методов математической статистики. Начиная с последних десятилетий прошлого века, складывается количественная теоретическая база агрометеорологии – теория продуктивности агроэкосистем. Задача расчета (прогноза) урожая в современной постановке сводится к решению краевых задач для следующих взаимосвязанных систем дифференциальных уравнений:

- системы уравнений роста и развития растений;

– системы уравнений энергомассообмена «почва–посев–атмосфера»;

– системы уравнений динамики органического вещества почвы.

Математическая постановка и практическое использование упрощенных решений таких задач в прикладных целях стало возможным благодаря работам М.И. Будыко, А.И. Будаговского, А.А. Ничипоровича, Ю.К. Росса, Х.Г. Тооминга, Е.П. Галямина, О.Д. Сиротенко, Р.А. Полуэктова и др. Математические методы, позволяющие определять конечный урожай агроэкосистемы, формирующийся под влиянием стохастических условий природной среды, как задачу математической физики, служат основой развития методологии агроэкологических исследований.

Следует отметить явно недостаточное количество литературы на русском языке, которую можно использовать в качестве учебной при подготовке исследователей-специалистов в области математического моделирования. Это книги Е.П. Галямина (1981), О.Д. Сиротенко (1981), переводные работы Пеннинга де Фриза, ван Лаара (1986) и Дж. Франса, Дж. Торнли (1987), а также книги Х.Г. Тооминга (1984) и Р.А. Полуэктова (1991 и 2006). По этой причине публикация настоящего учебного пособия представляется крайне необходимой.

Предлагаемое учебное пособие состоит из семи глав. Первая и вторая главы посвящены применению методов регрессионного анализа для построения прогностических зависимостей. Рассматриваются трудности решения таких задач, состоящие в нестационарности, многомерности, сильной коррелируемости независимых переменных, отклонениях от нормального закона и других нарушениях требований классического регрессионного анализа. Приводятся примеры построения эффективных схем для прогнозирования урожайности с помощью метода главных компонент, гребневой регрессии и робастных моделей.

Третья и четвертая главы посвящены теории продуктивности агроэкосистем и динамическим моделям, реализующим на практике положения этой теории. Значительное внимание уделено проблемам идентификации параметров динамических моделей на материалах многолетних полевых опытов, а также анализу чувствительности этих моделей и проверке их адекватности. Специально рассматривается задача количественной оценки агрометеорологических условий формирования урожая, включая задачу оценки влияния засух и других экстремальных явлений на продуктивность зерновых культур.

В пятой главе рассматриваются математические модели и методы мониторинга запасов продуктивной влаги пахотных почв на примере черноземной зоны России. Анализируются результаты реанализа (восстановления) многолетних рядов запасов продуктивной влаги. Рассматривается численная схема расчета многолетней динамики запасов органического

углерода в пахотных почвах. Показано, что определяемые в процессе мониторинга скорости разложения органического вещества могут служить эффективными предикторами для долгосрочного прогноза урожайности.

Материалы шестой главы посвящены вопросам применения математических методов для использования агрометеорологических прогнозов урожайности. Показано, что применение определенных нелинейных правил может дать существенный прирост валовых сборов продукции за счет ежегодной корректировки посевных площадей даже при сравнительно низкой оправдываемости прогнозов урожайности. Рассматриваются различные подходы к оптимизации распределения посевных площадей по территории.

В седьмой главе рассматриваются методы обобщения агроклиматической информации в условиях изменяющегося (нестационарного) климата. Актуальность таких исследований очевидна. Подчеркивается значимость робастных процедур обобщения информации в условиях изменяющегося климата. Предлагаются диаграммы для отслеживания трансформации функций распределения гидрометеорологических факторов в результате изменений климата. Большая часть материалов этой главы посвящена моделям и методам агроклиматического мониторинга. Представлены разработанные для целей мониторинга модели продуктивности агроэкосистем и методы расчета показателей тепло- и влагообеспеченности сельскохозяйственных культур, рассматриваются методы оценки рисков потерь продукции в результате неблагоприятных погодных и климатических условий.

# ГЛАВА 1

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АГРОМЕТЕОРОЛОГИИ

### 1.1. О стратегии, методах и проблемах построения моделей «погода–урожай»

При построении моделей для расчета и прогнозирования урожая может быть использована обширная метеорологическая информация. Это данные о таких факторах, как солнечная радиация, температура, влажность воздуха, осадки, влажность почвы, которые оказывают непосредственное влияние на рост, развитие и продуктивность сельскохозяйственных культур. Предположим, что период от всходов до созревания моделируемой культуры составляет 100 дней, а выбранный период осреднения метеорологических факторов равен декаде. В этом случае число влияющих на урожай ( $y$ ) независимых  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменных (предикторов) составит  $10 \times 5 = 50$  переменных. Временные ряды урожайности, данные которых используются для идентификации моделей «погода–урожай», обычно не превышают 30–40 лет. Таким образом, при построении таких моделей число потенциальных предикторов приближается или даже превышает число лет наблюдений. Для преодоления трудностей, связанных с многомерностью системы предикторов, используются следующие подходы:

- из исходного множества  $n$  предикторов отбирается меньшее число наиболее влияющих факторов;
- увеличиваются периоды осреднения метеорологических факторов – от возможного суточного до декадного, месячного или даже сезонного, что приводит к сокращению числа предикторов.

Между метеорологическими показателями, характеризующими погодные условия в течение вегетационного периода, существуют тесные статистические связи. Имеют место взаимозависимости между факторами, действующими в один и тот же отрезок времени. Обычно значимо коррелируют между собой декадная температура воздуха, дефицит влажности воздуха, число часов солнечного сияния, сумма выпавших за декаду осадков. Связаны между собой также характеристики одного и того же фактора (температуры воздуха, влажности почвы и др.), взятые за разные временные интервалы. Эти статистические связи возникают из-за того, что все рассматриваемые метеорологические величины не являются независимыми переменными, а определяются общим характером атмосферной циркуляции, который формируется в результате смены крупномасштабных барических образований и их трансформации.

Проблемам коррелированности прогностических зависимостей в агрометеорологии не всегда уделяется должное внимание. Между тем хорошо известно, что сильная коррелированность (мультиколлинеарность) предикторов может в значительной мере уменьшить эффективность использования регрессионных моделей для прогнозирования (Уланова Е.С., Сиротенко О.Д., 1968; Уланова Е.С., Забелин В.Н., 1990). Встречаются случаи, когда из-за сильной коррелированности предикторов (при множественном коэффициенте корреляции 0,99) модель оказывается непригодной для прогнозирования при проверке на новых данных. Линейная взаимозависимость предикторов приводит к ряду негативных последствий при построении регрессионных моделей. При этом уменьшается точность оценивания, увеличиваются ошибки коэффициентов регрессии, что затрудняет анализ влияния отдельных факторов на зависимую переменную. Некоторые коэффициенты регрессии при этом могут принимать значения, по величине и/или по знаку не соответствующие их физическому смыслу.

Продолжим рассмотрение проблем построения регрессионных моделей «погода – урожай» на примере решения конкретной задачи. Построим уравнение регрессии для прогнозирования урожайности озимой пшеницы в мае на территории Ставропольского края. В качестве предикторов будем привлекать данные о температуре воздуха и осадках, осредненные по территории края: это средняя температура воздуха  $T_5$  и сумма осадков  $P_5$  за май, средняя температура воздуха за март-апрель  $T_{3-4}$  и сумма осадков за тот же период  $P_{3-4}$ , а также сумма осадков за предшествующую осень и зиму  $P_o$  и  $P_z$  соответственно. Для учета влияния на урожай агрометеорологических условий предшествующего года в число предикторов включим урожайность пшеницы за прошлый год. Для анализа корреляционных связей между предикторами и предиктантом, а также между самими предикторами определим матрицу оценок коэффициентов корреляции (табл. 1.1). Для получения оценок коэффициентов корреляции использовались временные ряды урожайности и метеорологических факторов за 36 лет (с 1975 по 2010 гг. включительно,  $N=36$ ). Определим пороговые (значимые) оценки коэффициентов корреляции, которые равны 0,334 и 0,429 для 5 и 1 % уровней значимости для выборки  $N=36$  (см. таблицу, приведенную в Приложении).

Оценки коэффициентов корреляции, значимые при 5 %-ном уровне, отмечены \*, а при 1 %-ном уровне – \*\* соответственно. Данные табл. 1.1 показывают, что наиболее информативными показателями для прогнозирования урожайности озимой пшеницы являются урожайность за прошлый год ( $r=0,62$ ), осадки за осень прошлого года ( $r=0,59$ ), температура мая ( $r=-0,44$ ) и осадки за май ( $r=0,40$ ). Оценки коэффициентов корреляции для зимних осадков ( $r=0,22$ ) и температуры воздуха за март-апрель



оказались ниже 5 %-ного уровня. Обратим внимание на значимую связь между урожайностью озимой пшеницы за прошлый год и осенними осадками ( $r=0,36$ ).

Таблица 1.1

**Матрица оценок коэффициентов корреляции между предикторами и предиктантом, а также между предикторами в задаче прогнозирования урожайности озимой пшеницы**

	$y$	$y_p$	$T_5$	$P_5$	$T_{3-4}$	$P_0$	$P_z$	$P_{3-4}$
$y$	1,00	0,62**	-0,44**	0,40*	0,24	0,59**	0,22	0,42**
$y_p$		1,00	-0,13	0,23	-0,05	0,36**	0,27	0,18
$T_5$			1,00	-0,32	-0,21	-0,20	-0,07	-0,07
$P_5$				1,00	0,30	0,05	0,05	0,29
$T_{3-4}$					1,00	-0,14	-0,19	0,25
$P_0$						1,00	0,19	0,17
$P_z$							1,00	-0,01
$P_{3-4}$								1,00

Здесь  $y, y_p$  – урожайность озимой пшеницы за текущий и прошлый годы,  $T_5, P_5$  – температура воздуха и сумма осадков за май,  $T_{3-4}$  – средняя температура воздуха за март-апрель,  $P_0, P_z$  и  $P_{3-4}$  – сумма осадков за осень, зиму и март-апрель соответственно.

Часто возникает необходимость оценить тесноту связей между урожайностью и несколькими метеорологическими показателями, характеризующими погодные условия данного временного интервала (декадного, месячного и т.д.). Для этого на основании элементов матрицы коэффициентов корреляции определяются оценки необходимых множественных коэффициентов корреляции. Приведем формулу для расчета множественного коэффициента корреляции для двух независимых переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx_1} + r_{yx_2} - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}, \quad (1.1)$$

где  $r_{yx_1}, r_{yx_2}$  и  $r_{x_1x_2}$  – коэффициенты корреляции между случайными величинами  $y, x_1$  и  $x_2$ .

Оценим, например, степень влияния метеорологических условий в мае на формирование урожая озимой пшеницы

$$R = \sqrt{\frac{0,44^2 + 0,40^2 - 2 \cdot 0,44 \cdot 0,40 \cdot 0,32}{1 - 0,32^2}} = 0,52.$$

Таким образом, междугодовая изменчивость температуры воздуха и осадков может служить причиной  $0,52^2 \cdot 100 \% = 27 \%$ -ной дисперсии урожайности озимой пшеницы.

При интерпретации коэффициентов корреляции между метеорологическими факторами и урожайностью следует иметь в виду, что временные ряды урожайности могут иметь значимую детерминированную компоненту (тренд), которую желательно предварительно выделить и исключить. Для удаления тренда предлагается использовать метод разностных операторов. Этот метод применяется для выделения в «чистом» виде влияния изменений климата на урожайность (Сиротенко О.Д., Павлова В.Н., 2010).

Процедура перехода от временного ряда при  $t = 1, 2, \dots, n$  к ряду  $z_t = x_t - x_{t-1} = \nabla x_t$  называется взятием первых разностей. Длина ряда первых разностей на единицу меньше, чем длина исходного ряда. Аналогичным образом вводятся разностные операторы для взятия вторых и  $k$ -х разностей.

$$z_{t_2} = x_t - x_{t-2}, z_{t_k} = x_t - x_{t-k},$$

а также оператор для разностей второго порядка

$$z_t^2 = \nabla^2 x_t = \nabla(\nabla x_t) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}.$$

Оценим влияние разностных операторов на тесноту корреляционных связей между урожайностью и климатическими переменными для двух контрастных по климатическим условиям регионов России – Ростовской и Калужской областей. В табл. 1.2 приведены оценки параметров корреляции, характеризующих тесноту линейных статистических связей между урожайностью ярового ячменя и средней температурой воздуха и суммой осадков за май ( $T_5, R_5$ ) и июнь ( $T_6, R_6$ ).

Таблица 1.2

**Корреляционный анализ связей «погода – урожай»**

Предиктор	$T_5$	$T_6$	$R_5$	$R_6$
Ростовская область				
Фактические значения	-0,59*	-0,56*	0,27	0,59*
Первые разности	-0,67*	-0,65*	0,35	0,69*
Разности второго порядка	-0,71*	-0,69*	0,40*	0,74*
Калужская область				
Фактические значения	0,04	-0,54*	0,30	0,37*
Первые разности	-0,17	-0,67*	0,31*	0,56*
Разности второго порядка	-0,20	-0,67*	0,40*	0,61*

Анализируемые временные ряды урожайности, температуры воздуха и осадков представлены как в исходном виде, так и в виде первых

разностей и разностей второго порядка. Применение разностных операторов первого и второго порядка позволяет устранить влияние «ближних» трендов урожайности. Как следует из данных табл. 1.2, это приводит к увеличению тесноты связи климатических переменных с урожайностью. Так, применение разностных операторов первого порядка привело к повышению доли дисперсии урожайности, связанной с изменчивостью средней температуры в Ростовской области в мае-июне на 32 %. Доля дисперсии, обусловленная изменчивостью осадков за тот же период, при использовании первых разностей возросла на 42 %. Еще более эффективным оказалось применение разностных операторов второго порядка. В этом случае за счет исключения трендов доля дисперсии, связанная с колебаниями температуры воздуха в мае и июне, повысилась на 48 %, а доля дисперсии, связанная с изменчивостью осадков за тот же период, повысилась на 68 %. Эффективность применения метода разностей второго порядка обусловлена нелинейностью трендов урожайности.

Оценки коэффициентов корреляции, представленные в табл. 1.1, подтверждают реальность влияния выбранной системы предикторов на формирование урожайности озимой пшеницы в Ставропольском крае. Используем стандартную программу множественной регрессии (Multiple Regression) для исследования этой зависимости (табл. 1.3).

Таблица 1.3

**Оценки параметров множественной регрессии для расчета урожайности озимой пшеницы,  $R = 0,866$ ,  $R^2 = 0,750$ ,  $R_a^2 = 0,686$ , стандартная ошибка  $S = 3,88$  ц/га**

Предикторы, размерность	$\beta$	Станд. ошибка $\beta$	B	Станд. ошибка B	t(27)	p-level
			8,208	7,874	1,042	0,306
$y_p$ , ц/га	0,397	0,109	0,378	0,104	3,650	0,001
$T_5$ , °C	-0,222	0,106	-0,805	0,382	-2,109	0,044
$T_{3-4}$ , °C	0,203	0,108	0,824	0,441	1,869	0,072
$P_0$ , мм	0,384	0,108	0,064	0,018	3,562	0,001
$P_z$ , мм	0,060	0,102	0,018	0,030	0,587	0,562
$P_{3-4}$ , мм	0,187	0,105	0,047	0,026	1,779	0,087
$P_5$ , мм	0,096	0,111	0,034	0,040	0,867	0,394

Оценки коэффициентов регрессии приведены как для исходной системы предикторов (B), так и для предикторов в стандартизованном масштабе ( $\beta$ ). Для перехода к стандартизованному масштабу применяется линейное преобразование:

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}, i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\bar{x}_i$  и  $\sigma_{x_i}$  – среднее значение и среднее квадратическое отклонение соответственно. Коэффициенты  $\beta$  – безразмерные величины, что позволяет использовать их для сравнительной оценки значимости отдельных предикторов. Помимо оценок коэффициентов регрессии в табл. 1.3 приведены их стандартные ошибки (Standard Error). Два последних столбца в табл. 1.3 (t и p-level) содержат значения студентовых отношений (B/St.Er.B) для оценок  $B = b_0, b_1, \dots, b_n$  и их уровни значимости для проверки гипотезы о равенстве коэффициентов регрессии нулю.

Показателем качества подобранного уравнения регрессии традиционно считается квадрат выборочного коэффициента корреляции  $R^2$  (R-squared), представляющего собой отношение суммы квадратов отклонений, обусловленных регрессией, к сумме квадратов отклонений предиктанта:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (1.2)$$

где  $Y_i$  и  $\hat{Y}_i$  – фактические и вычисленные значения предиктанта,  $\bar{Y}$  – его среднее значение. Альтернативное название  $R^2$  – множественный коэффициент детерминации, который измеряют не в долях единицы, а в процентах. Чем ближе значение  $R^2$  к ста процентам, тем лучше подобранная модель описывает данные наблюдений. Величина  $R^2$  является квадратом коэффициента корреляции между  $Y_i$  и  $\hat{Y}_i$ , при этом  $0 \leq R^2 \leq 100\%$ .

Поскольку  $R \geq 0$ , то даже в том случае, когда между предиктантом и предикторами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  нет реальной связи, величина  $R$  всегда будет больше нуля. Коэффициент  $R$  представляет собой положительно смещенную оценку, которая возрастает по мере увеличения числа независимых переменных, входящих в уравнение регрессии и уменьшения объема выборки. Чтобы избежать грубых ошибок при анализе, особенно в случае малых выборок, наряду с  $R$  предлагается вычислять приведенный или скорректированный коэффициент (Adjusted) множественной корреляции:

$$R_a^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \left( \frac{N - 1}{N - p} \right). \quad (1.3)$$

Здесь  $R_a$  – приведенный множественный коэффициент корреляции;  $p$  – общее число коэффициентов модели, включая свободный член  $b_0$ ,  $N$  – общее число наблюдений. Главное преимущество статистики  $R_a^2$  в том, что ее можно использовать для сравнения уравнений с разным числом предикторов. Статистика  $R$  при заданном  $n$  является неубывающей функцией от  $p$ .  $R_a$ , в отличие от  $R$ , при увеличении числа  $p$  может как возрасти, так и убывать, что позволяет определять оптимальный набор предикторов.

Наконец, последняя характеристика таблицы выдачи результатов  $S$  – стандартная ошибка оценки (Std. Error of Est). Эта величина, по определению, равна:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N - p - 1} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}, \quad (1.4)$$

где  $y_i$  и  $\hat{y}_i$  – фактические и вычисленные значения отклика (предиктанта);  $N$  – объем выборки;  $p$  – число степеней свободы, обусловленных регрессией.

Данные табл. 1.3 позволяют провести содержательный анализ полученной прогностической зависимости. Так, оценки  $\beta$  для сумм осадков за все учитываемые периоды (за прошлую осень, зиму, ранневесенний период и, наконец, май) положительны, что соответствует представлениям о решающем влиянии условий увлажнения на формирование урожая озимой пшеницы в Ставропольском крае. Влияние термических условий, в отличие от осадков, носит разнонаправленный характер. Знаки коэффициентов регрессии для температуры в мае и марте показывают, что повышение температуры воздуха в мае на  $1^\circ\text{C}$  приводит к снижению урожайности в среднем на 0,80 ц/га, а повышение температуры на  $1^\circ\text{C}$  ранней весной, напротив, способствует повышению урожайности на 0,82 ц/га. Повышение температуры воздуха в ранневесенний период при наблюдаемом обычно в это время достаточном увлажнении почвы способствует восстановлению растений от повреждений, причиненных перезимовкой, и улучшает условия развития. Повышение температуры в мае, как правило, сопряжено с ухудшением влагообеспеченности, что ведет к снижению продуктивности посевов.

Коэффициенты регрессии рассматриваемого уравнения (табл. 1.3) по величине и по знаку не противоречат априорным представлениям о характере влияния агрометеорологических условий на формирование урожайности озимой пшеницы. Это уравнение объясняет порядка 75 % дисперсии урожайности, что позволяет рекомендовать его для прогнозирования. Однако, согласно данным, приведенным в колонке  $p$ -level, можно заключить, что только три коэффициента регрессии (при предикторах  $y_p$ ,  $T_3$  и  $P_0$ ) значимы при 5 %-ном уровне, т.е. гипотеза о равенстве нулю выборочных коэффициентов регрессии отвергается лишь для указанных коэффициентов. Возникает сомнение, что полученное уравнение окажется достаточно устойчивым при использовании на новых материалах наблюдений.

Для получения более надежной прогностической зависимости было отброшено два наименее значимых предиктора  $P_2$  и  $P_5$ . Кроме того, предиктор  $T_{3-4}$  заменен на  $T_3$ , чтобы более четко представить положительную связь между температурой воздуха ранней весной (в марте) и урожайностью. Результаты расчета для нового набора предикторов представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Оценки параметров зависимости для прогнозирования урожайности озимой пшеницы в Ставропольском крае.  $R=0,866$ ,  $R^2=0,751$ ,  $R_a^2=0,708$ ,  $S=3,75$  ц/га

Предикторы, размерность	$\beta$	Станд. ошибка $\beta$	B	Станд. ошибка B	t(29)	p-level
			16,497	6,037	2,733	0,011
$y_p$ , ц/га	0,377	0,102	0,359	0,097	3,709	0,001
$T_3$ , °C	0,242	0,102	0,668	0,280	2,380	0,024
$T_5$ , °C	-0,240	0,098	-0,867	0,356	-0,435	0,021
$P_0$ , мм	0,343	0,101	0,057	0,017	3,395	0,002
$P_{3-4}$ , мм	0,209	0,098	0,052	0,024	2,137	0,041

Сразу же заметим, что все оценки коэффициентов регрессии новой зависимости, включая  $b_0$ , значимы при 5 %-ном уровне. Коэффициент детерминации для новой зависимости не изменился –  $R=0,866$ , а приведенный множественный коэффициент корреляции  $R_a^2$  возрос с 0,686 до 0,708. Стандартная ошибка  $S$  уменьшилась с 3,88 до 3,74 ц/га. Таким образом, получена более точная и устойчивая прогностическая зависимость (табл. 1.4), которую представим в стандартном виде:

$$\hat{y} = 16,497 + 0,359y_p + 0,668T_3 - 0,867T_5 + 0,057P_0 + 0,052P_{3-4}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) позволяет оценивать ожидаемую урожайность озимой пшеницы на территории Ставропольского края в конце мая. Для составления прогноза должна быть известна урожайность за прошлый год ( $y_p$ ), средняя температура воздуха в марте  $T_3$  и в мае  $T_5$ , а также сумма осадков за прошлую осень ( $P_0$ ) и за март-апрель ( $P_{3-4}$ ) текущего года. Уравнение (1.5) пригодно для практического использования, но его не следует рассматривать как лучшую из возможных прогностическую зависимость.

Можно попытаться улучшить эту прогностическую зависимость путем более полного учета предыстории урожайности. Приведем для примера уравнения регрессии для прогнозирования урожайности ярового ячменя (Сиротенко О.Д., Павлова В.Н., 2010) на территории Ростовской области:

$$Y_t = -1,022T_5^* - 1,038T_6^* + 0,22R_5^* + 0,049R_6^* + 0,268Y_{t-1}^* + 45,84; \\ R = 0,839, \quad R_a = 0,645; \quad (1.6)$$

$$Y_t = -0,928T_5^* - 0,817T_6^* + 0,016R_5^* + 0,043R_6^* + 0,216Y_{t-1}^* + 0,237Y_{t-2}^* + 36,85, \\ R = 0,866, \quad R_a = 0,687. \quad (1.7)$$

В первом уравнении, как и в (1.5), в качестве предиктора привлекается урожайность ярового ячменя за прошлый год  $Y_{t-1}$ , во втором – за прошлый  $Y_{t-1}$  и позапрошлый  $Y_{t-2}$  годы. Учет значений урожайности за  $(t-1)$ -й и  $(t-2)$ -й годы для Ростовской области привел к уменьшению среднеквадратической ошибки с 3,08 до 2,77 и 2,62 ц/га для уравнений (1.6) и (1.7) соответственно. Увеличение точности расчета (прогноза) урожайности на 15 % свидетельствует о реальной возможности повышения точности прогнозирования урожайности за счет привлечения в качестве предикторов данных урожайности за прошлые годы.

## 1.2. Нелинейные регрессионные модели

Как правило, все зависимости, встречающиеся в окружающем нас мире, нелинейны. Предположение о линейности модели – не более чем одно из возможных допущений. Существует несколько причин широкого использования этого допущения в регрессионном анализе:

- во многих случаях предположение о линейности является простейшим, с которого представляется естественным начинать исследование;
- в ряде случаев оно имеет вполне удовлетворительную и даже высокую адекватность;
- многие статистические методы приспособлены к линейным задачам, а нелинейные аналоги этих методов либо отсутствуют, либо недостаточно разработаны.

Принимая во внимание сказанное, необходимо, тем не менее, подчеркнуть, что нелинейные модели регрессии обладают важным преимуществом перед линейными. Основное из них состоит в большей адекватности нелинейных моделей с существенно меньшим числом неизвестных параметров.

В общем случае нелинейная регрессионная модель может быть представлена в виде:

$$Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.8)$$

В зависимости от полноты априорных знаний о моделируемом явлении процесс идентификации (1.8) может существенно различаться. Если известна структура модели, т.е. вид функции  $F$ , задача сводится к оценке ее неизвестных параметров с помощью процедур нелинейного оценивания (Nonlinear Estimation), позволяющих решать задачу минимизации функции многих переменных с ограничениями или без ограничений на параметры. Напротив, может быть известна лишь система  $x_1, x_2, \dots, x_n$  независимых переменных, которая в дальнейшем может уточняться. В этом случае в качестве первого шага может оказаться полезным метод нелинейных преобразований. В табл. 1.5 приведены примеры нелинейных функций  $Y = F(x, b_0, b_1)$  и соответствующих нелинейных преобразований, приводящих их к линейному виду.

Таблица 1.5

**Примеры линеаризующих преобразований для простой регрессионной зависимости**

№ п/п	Функция	Нелинейные преобразования			
		$Y_1$	$X_1$	$a_0$	$a_1$
1	$Y = b_0 + b_1/X$	$Y$	$1/X$	$b_0$	$b_1$
2	$Y = 1/(b_0 + b_1X)$	$1/Y$	$X$	$b_0$	$b_1$
3	$Y = X/(b_0 + b_1X)$	$X/Y$	$X$	$b_0$	$b_1$
4	$Y = b_0 b_1^X$	$\ln Y$	$X$	$\ln b_0$	$\ln b_1$
5	$Y = 1/(b_0 + b_1 e^{-X})$	$1/Y$	$e^{-X}$	$b_0$	$b_1$
6	$Y = b_0 X^{b_1}$	$\ln Y$	$\ln X$	$\ln b_0$	$b_1$
7	$Y = b_0 + b_1 \ln(X + 1)$	$Y$	$\ln(X + 1)$	$b_0$	$b_1$
8	$Y = b_0 X/(b_1 + b_2 X)$	$1/Y$	$1/X$	$b_1/b_0$	$b_2/b_0$
9	$Y = b_0 e^{b_1/X}$	$\ln Y$	$1/X$	$\ln b_0$	$b_1$
10	$Y = b_0 + b_1 X^n$	$Y$	$X^n$	$b_0$	$b_1$

Существует еще один, по мнению ряда исследователей, исключительно полезный способ преобразования предиктанта, который состоит в следующем: предполагается, что (1.8) принадлежит семейству степенных функций, «наилучшая степень» которых находится методом максимального правдоподобия. Этот метод часто называют методом Бокса–Кокса. Предположим, у нас имеется временной ряд переменной отклика  $Y$ , которая, как, например, урожайность, всегда положительна. Если отношение наибольшего  $Y$  к наименьшему является «значимым», скажем 10 и больше, можно рассмотреть возможность преобразования  $Y$ . Полезно рассмотреть степени  $Y^\lambda$  и попытаться найти наилучшее значение  $\lambda$ . Однако, если  $\lambda = 0$ , то  $Y^0 = 1$ , что делает все данные одинаковыми. Если же использовать преобразование

$$W = \begin{cases} (Y^\lambda - 1)/\lambda \\ \ln Y, \text{ если } \lambda = 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

то проблема  $\lambda = 0$  будет решена, поскольку  $\ln Y$  является подходящим пределом  $(Y^\lambda - 1)/\lambda$ , стремящимся к нулю. Таким образом, теперь семейство непрерывно по  $\lambda$ . Преобразование Бокса–Кокса (1.9) при  $\lambda > 1$  растягивает расстояние между малыми значениями и снижает его между большими по величине значениями данных. При  $\lambda < 1$  наблюдается обратная картина.

Для поиска «наилучшего значения»  $\lambda$  обычно используется следующая последовательность значений этого показателя:



$$\dots, -2, -1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots$$

Тот факт, что выбрано «наилучшее значение»  $\lambda$ , минимизирующее среднюю квадратическую ошибку модели, не гарантирует практической полезности уравнения.

Рассмотрим пример построения достаточно сложной нелинейной регрессионной модели – это модель динамики гумуса дерново-подзолистых почв (Сиротенко О.Д. и др., 2002). Для идентификации модели использовались объединенная база данных длительных опытов с удобрениями ВИУА\* (около 500 вариантов многолетних опытов) с массивом агрометеорологических данных, подготовленных с помощью имитационной системы «климат–почва–урожай» ФГБУ «ВНИИСХМ».

Задача построения физико-статистической модели трансформации гумуса связана с идентификацией следующей функции:

$$\Delta C = f(C_H, L, H, N, pp, MT, R_v, ПЕВТ, БКП). \quad (1.10)$$

Здесь  $\Delta C$  – изменение содержания гумуса за период опыта (%/год);  $L$  – содержание физической глины (%);  $H$  – годовая норма навоза (т/га/год);  $N$  – годовая доза NPK по учету азота в его составе (кгN/га/год);  $pp$  – доля пропашных культур и чистого пара в севообороте (%);  $MT$  – доля многопашотных трав в севообороте (%);  $R_v$  – сумма осадков (мм);  $ПЕВТ$  – потенциальное испарение (мм);  $БКП$  – биоклиматический потенциал (ц/га). Агроклиматические показатели рассчитывались за период от перехода среднесуточной температуры воздуха через  $5^\circ$  весной до перехода ее через  $5^\circ$  осенью.

Технически задача построения наилучшей модели в виде произвольного степенного полинома (1.10) является достаточно сложной в силу большой размерности, а также из-за отсутствия априорной информации о значимости отдельных предикторов. Предварительно установлено, что наиболее приоритетным является показатель исходного содержания гумуса ( $C_H$ ). Размерность задачи растет из-за необходимости включения в состав членов степенного ряда, аппроксимирующего функцию (1.10), не только одинарных, но и двойных, тройных и т.д. произведений, описывающих нелинейные взаимодействия между отдельными факторами. Число членов такого ряда в случае девяти исходных переменных при учете лишь двойных и тройных взаимодействий составляет 387 переменных, из которых более 80 % приходится на тройные произведения. Между тем содержательный анализ задачи, а также рассмотрение структуры упомянутых выше динамических моделей показывает, что не только тройные, но даже взаимодействия факторов более высокого порядка могут оказывать

---

\* Государственное научное учреждение «Всероссийский научно-исследовательский институт агрохимии им. Д.Н. Прянишникова» РАСХН (ГНУ ВНИИА РАСХН).

значимое влияние на динамику гумуса (т.е. на переменную  $\Delta C$ ). Реализовать в той или иной форме процедуру перебора всех влияющих факторов с целью определения минимального числа «наилучших» переменных не представилось возможным. Тем не менее в результате формального и содержательного «просеивания» исходного набора независимых переменных найдены вполне приемлемые уравнения регрессии для суглинистых и супесчаных почв.

Оценка коэффициента множественной корреляции для тяжелых почв равна 0,93. Таким образом, уравнение регрессии для тяжелых почв воспроизводит 87 % дисперсии зависимой переменной  $\Delta C$ . Такой результат представляется достаточно хорошим. Он свидетельствует о возможности построения надежных расчетных схем для определения динамики гумуса пахотных почв Нечерноземной зоны европейской территории Российской Федерации. Заметим, что найденные уравнения могут быть улучшены за счет учета тройных и более сложных нелинейных связей между исходными независимыми переменными.

В табл. 1.6 наряду с оценками коэффициентов регрессии приведены их стандартные ошибки и отношения указанных величин (t-статистики). Из этих данных следует, что коэффициенты регрессии по абсолютной величине превышают их стандартные ошибки в три и более раз во всех случаях, кроме одного. Это свидетельствует о надежности полученных оценок большинства коэффициентов регрессии. Исключение составляет лишь коэффициент регрессии для азотных удобрений  $N$ , которые представлены в степени 0,4. Но и здесь доверительная вероятность для оценки значимости этого коэффициента превышает 90 %.

Таблица 1.6

**Уравнение регрессии для расчета запасов гумуса  $\Delta C$  (%·год<sup>-1</sup>) для суглинистых дерново-подзолистых почв.  $R=0,93$**

Независимые переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки	t-статистики
$pp^{2,5} \cdot C_H^{0,1}$	$3,35 \times 10^{-7}$	$1,00 \times 10^{-7}$	3,5241
$pp^{1,5} \cdot C_H^{3,8}$	$-2,20 \times 10^{-5}$	6,935	-3,1051
$N^{0,4} \cdot C_H$	$9,23 \times 10^{-4}$	$3,28 \times 10^{-4}$	2,8183
$R_v \cdot C_H$	$-1,932 \times 10^{-4}$	$1,9 \times 10^{-3}$	-10,1642
$ПЕВТ \cdot C_H$	$9,31 \times 10^{-4}$	$9,5 \times 10^{-5}$	9,8336
$МТ \cdot C_H$	$3,85 \times 10^{-3}$	$4,2 \times 10^{-4}$	9,1669
$МТ$	$-9,203 \times 10^{-3}$	$9,36 \times 10^{-4}$	-9,8317
$МТ \cdot L$	$1,26 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-5}$	7,1229
$H^{0,7} \cdot ПЕВТ^{0,5}$	$9,6 \times 10^{-4}$	$1,8 \times 10^{-5}$	5,2702
$ПЕВТ^{0,025}$	-25,91	2,66	-9,7403
$R_v^{0,5}$	$7,93 \times 10^{-2}$	$8,08 \times 10^{-3}$	9,8149

Итак, приведенная в табл. 1.6 зависимость имеет высокую тесноту связи, а оценки коэффициентов регрессии определены на основании экспериментальных данных достаточно надежно.

### 1.3. Поиск наилучшего набора предикторов

В этом разделе обсудим статистические процедуры выбора переменных, входящих в регрессию. Предположим, необходимо построить линейные регрессионные уравнения некоторой переменной отклика (предиктанта)  $Y$  от базисных предикторных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Предположим также, что  $z_1, z_2, \dots, z_n$  являются функцией одной или нескольких переменных  $x_i$  и представляют собой полное множество, из которого предстоит выбрать предикторы. Это множество включает в себя любые необходимые функции: квадраты, перекрестные произведения, логарифмы, обратные величины, степени и т.д.

Известно, что число предикторов не должно быть велико по сравнению с объемом выборки. Это правило носит название «табу» статистического прогноза. Действительно, хотя при учете большого числа факторов точность прогностической формулы на зависимой выборке повышается, но при переходе к новой выборке (независимому материалу) качество такого прогноза резко ухудшится. В частности, когда число предикторов точно равно объему выборки, уравнение регрессии становится точной формулой (система условных уравнений имеет единственное решение) и коэффициент множественной корреляции равен единице даже тогда, когда между предиктантом и предикторами нет никакой связи. Эмпирически установлено, что оптимальным отношением числа предикторов к объему выборки следует считать примерно 1/10. Таким образом, при выборе наилучшего набора предикторов нужно стремиться к тому, чтобы минимальная ошибка прогнозирования достигалась при возможно меньшем числе предикторов. Предложено множество процедур для построения наилучшего уравнения регрессии, но не существует единой статистической процедуры, позволяющей это сделать. В книге (Дрейпер Н.Р., Смит Г., 2007) рассмотрено пять таких процедур:

- метод всех возможных регрессий с использованием критериев  $R^2$ ,  $S^2$  и критерия Мэллоуза  $C_p$ ;
- метод наилучших подмножеств регрессии с использованием критериев  $R^2$ ,  $R_\alpha^2$  и  $C_p$ ;
- шаговая регрессия;
- метод исключения;
- модификации вышеупомянутых методов.

Рассмотрим некоторые из этих подходов (см. также: Уланова Е.С., Забелин В.Н., 1990).

**Метод исключения.** Анализ начинается с включения в модель всех предикторов. Затем по  $t$ -статистике (табл. 1.7), рассчитанной для каждого коэффициента, определяется наименее значимая переменная, которая исключается из уравнения. Снова строится модель по оставшимся переменным. Для новой переменной рассчитывается  $t$ -статистика и определяется наименее значимая переменная, предназначенная для удаления, и т.д. Подход поочередного исключения только одной переменной называется шаговой процедурой назад, или методом шагового исключения. Важно подчеркнуть, что удаленные переменные из дальнейшего анализа исключаются и больше не могут войти в модель. Такой подход не позволяет найти оптимальное подмножество, составленное из удаленных переменных, если такое существует, что бывает в случаях наличия между переменными сильной взаимной корреляции. Заметим, что использование  $t$ -статистики эквивалентно удалению переменной, минимально уменьшающей  $R^2$  уравнения регрессии. Процесс может продолжаться до тех пор, пока позволяют заданные правила остановки.

**Метод включения.** В отличие от метода исключения, метод включения начинается с построения уравнения, содержащего один лучший предиктор, в которое затем по одному добавляются другие переменные. Это шаговая процедура вперед. Первый лучший предиктор отбирается по максимальному (абсолютному значению) парному коэффициенту корреляции с зависимой переменной – это первый шаг. Затем добавляется переменная, удовлетворяющая одному из следующих критериев, используемых также в методе исключения: по сравнению с другими переменными она дает максимум увеличения  $R^2$ . Процесс включения продолжается до тех пор, пока включаемые переменные удовлетворяют заданным критериям остановки:

- 1) при достижении определенного числа переменных в модели;
- 2) при сильной коррелированности систем независимых переменных, вызванной включением очередной переменной.

Обычно на практике задают какую-либо комбинацию из этих критериев.

**Метод включения-исключения.** Это более сложная процедура является комбинацией методов включения и исключения. На каждом шаге рассматриваются следующие возможности: добавить переменную, исключить переменную, одну переменную заменить другой, завершить процесс. Принимая решение, руководствуются следующими правилами:

- 1) включенные в модель переменные исключаются, если имеют  $t$ -статистику меньше заданного уровня;
- 2) переменная, включенная в модель, заменяется на другую, не включенную, если увеличивается  $R_a^2$  модели;
- 3) переменная с максимальным значением  $t$  включается в модель, если  $t$  превышает заданный уровень и коррелированность системы независимых переменных не становится слишком большой.

Существующий произвол в выборе лучшего подмножества предикторов должен быть ограничен ясными представлениями о роли факторов в моделируемом процессе или явлении.

Ниже в качестве примера приведем фрагмент результатов расчета программы поиска наилучшего подмножества предикторов для прогноза урожайности зерновых культур в Западном Казахстане.

Обозначения (коды) предикторов:

24 – средняя температура воздуха за третью декаду мая,

26 – средняя температура воздуха за вторую декаду июня,

41 – показатель влагообеспеченности третьей декады мая,

44 – показатель влагообеспеченности третьей декады июня,

54 – средняя декадная сумма осадков за апрель,

55 – средняя декадная сумма осадков за май,

70 – показатель влагообеспеченности июня,

78 – сумма осадков за холодный период.

#### Уравнения с одной переменной

$R^2$	$R^2_{\alpha}$	$C_p$	Коды предикторов	
0,478	0,463	23,82	70	
0,457	0,442	26,11	78	
0,363	0,345	36,34	26	
0,244	0,223	49,30	44	
0,215	0,192	52,54	54	
0,105	0,080	64,44	55	
0,082	0,056	66,99	41	
0,075	0,049	67,70	24	

#### Уравнения с двумя переменными

$R^2$	$R^2_{\alpha}$	$C_p$	Коды предикторов	
0,637	0,616	8,50	70	78
0,608	0,585	11,66	78	54
0,596	0,572	13,01	78	41
0,540	0,513	19,08	70	55
0,523	0,495	20,96	70	54
0,498	0,469	23,63	70	26
0,492	0,462	24,28	70	41
0,488	0,458	24,78	70	24
0,481	0,451	25,45	70	44

### Уравнения с тремя переменными

$R^2$	$R^2_\alpha$	$C_p$	Коды предикторов		
0,697	0,670	3,96	70	78	54
0,694	0,667	4,26	70	78	41
0,690	0,662	4,74	78	54	26
0,679	0,650	5,96	70	78	55
0,671	0,641	6,77	78	26	41
0,671	0,641	6,78	70	78	24
0,650	0,618	9,10	78	54	24
0,649	0,617	9,22	78	54	41
0,646	0,614	9,54	70	78	44
0,640	0,607	10,20	70	78	26

### Уравнения с четырьмя переменными

$R^2$	$R^2_\alpha$	$C_p$	Коды предикторов			
0,726	0,692	2,84	70	78	54	55

Первое из пяти лучших уравнений

Предикторы	Коэффициент регрессии	t-статистики
70	0,165	3,59
78	0,132	4,24
54	0,582	2,34
55	-0,534	-1,83

Свободный член -0,172

$R^2$	$R^2_\alpha$	$C_p$	Предикторы			
0,721	0,686	3,33	70	78	54	41

Второе из пяти лучших уравнений

Предикторы	Коэффициент регрессии	t-статистики
78	0,154	4,79
54	0,638	2,40
26	-0,979	-2,89
41	0,605	1,90

Свободный член -0,525

$R^2$	$R_\alpha^2$	$C_p$	Предикторы			
0,719	0,684	3,60	70	78	54	41

Третье из пяти лучших уравнений

Предикторы	Коэффициент регрессии	t-статистики
70	0,962	2,82
78	0,153	4,72
54	0,460	1,67
41	0,510	1,57

Свободный член -0,243

**Уравнения с пятью переменными**

$R^2$	$R_\alpha^2$	$C_p$	Предикторы				
0,736	0,694	3,68	70	78	54	41	55

Четвертое из пяти лучших уравнений

Предикторы	Коэффициент регрессии	t-статистики
70	0,147	3,02
78	0,143	4,39
54	0,456	1,68
41	0,372	1,12
55	-0,437	-1,44

Свободный член -0,188

$R^2$	$R_\alpha^2$	$C_p$	Предикторы				
0,734	0,692	3,90	70	78	54	24	55

Пятое из пяти лучших уравнений

Предикторы	Коэффициент регрессии	t-статистики
70	0,147	2,97
78	0,140	4,36
54	0,539	2,14
24	-0,411	-1,00
55	-0,447	-1,47

Свободный член -0,115

$R^2$	$R^2_\alpha$	$C_p$	Предикторы				
0,734	0,691	3,95	70	78	54	26	41
0,733	0,691	3,99	70	78	54	41	44
0,728	0,684	4,59	70	78	54	44	55
0,726	0,682	4,79	70	78	54	24	26
0,726	0,682	4,80	78	54	24	26	41
0,726	0,682	4,83	70	78	54	26	55
0,719	0,674	5,57	70	78	24	26	41
0,719	0,673	5,60	70	78	54	24	41

Уравнения с шестью переменными

$R^2$	$R^2_\alpha$	$C_p$	Предикторы					
0,742	0,690	5,08	70	78	54	41	44	55
0,738	0,686	5,49	70	78	54	26	41	55
0,737	0,684	5,66	70	78	54	24	26	41
0,736	0,684	5,68	70	78	54	24	41	55
0,735	0,682	5,87	70	78	54	24	26	55
0,733	0,680	6,02	70	78	54	24	26	44
0,731	0,677	6,31	78	54	24	26	41	55
0,722	0,666	7,26	70	78	24	26	41	55
0,714	0,659	8,15	78	54	24	26	44	55
0,710	0,652	8,52	78	24	26	41	44	55

Уравнения с семью переменными

$R^2$	$R^2_\alpha$	$C_p$	Предикторы						
0,742	0,680	7,02	70	78	54	26	41	44	55
0,742	0,680	7,08	70	78	54	24	41	44	55
0,740	0,678	7,26	70	78	54	24	26	41	44
0,740	0,677	7,31	70	78	54	24	26	44	55
0,740	0,677	7,31	70	78	54	24	26	44	55
0,739	0,676	7,38	70	78	54	24	26	41	55
0,731	0,666	8,30	78	54	24	26	41	44	55
0,725	0,659	8,93	70	78	24	26	41	44	55
0,578	0,477	24,91	70	54	24	26	41	44	55



### Уравнения с восемью переменными

$R^2$	$R_\alpha^2$	$C_p$	Предикторы							
0,743	0,669	9,00	70	78	54	24	26	41	44	55

Итак, программа поиска наилучшего набора предикторов для прогнозирования урожайности зерновых культур в Западном Казахстане выделила пять лучших уравнений регрессии (Уланова Е.С., Забелин В.Н, 1990). Попробуем теперь из этих пяти вариантов определить оптимальный. Проанализируем знаки коэффициентов регрессии для этого набора предикторов: 24, 26, 41, 44, 54, 55, 70, 78. Учитывая, что засушливость климата – основная причина снижения урожаев зерновых культур в Казахстане, можно предположить, что предикторы, характеризующие рост увлажнения, должны положительно влиять на урожайность, а предикторы, определяющие рост засушливости, – отрицательно. Следовательно, коэффициенты регрессии для температуры воздуха за третью декаду мая (код 24) и вторую декаду июня (код 26) должны быть отрицательными, тогда как коэффициенты регрессии для всех остальных факторов – коды 41, 44, 54, 55, 70 – должны быть положительными. Обратим внимание, что коэффициент регрессии для декадной суммы осадков за май (предиктор 55) в первом, четвертом и пятом уравнениях отрицателен, что позволяет исключить эти три уравнения из списка лучших. В списке лучших вариантов остаются второе и третье уравнения:

$$y_1 = 0,154(78) + 0,639(54) - 0,979(26) + 0,605(41) - 0,525;$$

$$y_2 = 0,962(70) + 0,153(78) + 0,460(54) + 0,510(41) - 0,243.$$

Для определения наилучшей прогностической зависимости из этих двух оставшихся уравнений регрессии исследование следует продолжить. Окончательный выбор, по-видимому, можно сделать в результате проверки найденных уравнений на новых материалах.

## ГЛАВА 2

# АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ

### 2.1. Модели с ограничениями на коэффициенты

Помимо рассмотренных классических уравнений регрессии:

$$\hat{y} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n, \quad (2.1)$$

где для определения коэффициентов  $p_j$  ставится лишь одно условие: средний квадрат ошибки значений отклика  $(\hat{y}_i - y_i)^2$  должен быть минимальным, может быть построено множество других уравнений. Часто относительно (2.1) имеется разнообразная априорная информация, которую можно представить в виде системы ограничений как линейных, так и нелинейных, налагаемых на коэффициенты  $p$ :

$$f_k(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (2.2)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$  – число коэффициентов,  $k$  – число ограничений.

Рассмотрим регрессию с простейшим видом линейных ограничений на коэффициенты:

$$p_j \geq 0. \quad (2.3)$$

Задачу построения уравнения регрессии с неотрицательными коэффициентами решим на примере численной схемы объективного анализа поля декадных сумм осадков на территории Литвы (Сиротенко О.Д. и др., 1973). Разработана численная схема для расчета в оперативном режиме количества выпавших осадков в 15 фиксированных пунктах по данным наблюдений шести метеорологических станций. Идентифицированы коэффициенты  $p_{ji}$  для 15 уравнений вида (2.1) с шестью предикторами ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Для оценки коэффициентов  $p_{ji}$  сформировано две выборки: основная и проверочная, содержащие 89 и 51 полей сумм осадков соответственно для территории Литвы.

Задачу определения уравнения регрессии с ограничениями на параметры типа (2.2) часто называют задачей квадратического программирования, поскольку ее решение сводится к минимизации квадратической функции с ограничениями.

Решение задачи квадратического программирования для объективного анализа полей декадных сумм осадков на территории Литвы представлено в табл. 2.1. Каждый из 15 векторов параметров состоит из шести весовых множителей  $p_1, p_2, \dots, p_6$ . В соответствии с условием (2.3) их значения должны быть неотрицательными. Все векторы, за исключением 13-го, имеют одну, две или три нулевые составляющие.

На основании весовых коэффициентов (табл. 2.1) определены суммы осадков в 15 пунктах для 51-го поля осадков, которые составили

независимую выборку. Оценки коэффициентов корреляции между измеренными и вычисленными суммами осадков приведены в табл. 2.2 (колонка I).

Эффективность модели регрессионного анализа (квадратического программирования) с неотрицательными коэффициентами оценивается коэффициентом корреляции, равным 0,685.

Решим эту задачу другими методами на том же фактическом материале. Начнем с популярного в метеорологии метода оптимальной интерполяции (Гандин Л.С., 1963). Для реализации этого метода необходимо предварительно определить пространственную корреляционную функцию  $r(p)$  декадных сумм осадков, где  $p$  – расстояние (км). Затем на основании  $r(p)$  для каждого из 15 пунктов в соответствии с матрицей расстояний  $p_{ji}$  нужно составить корреляционную матрицу и решить соответствующие системы шести линейных уравнений. Полученные таким образом коэффициенты представлены в табл. 2.3. Около 25 % из них оказались отрицательными. Отметим, что лишь для одной станции ( $N=15$ ) все 6 коэффициентов интерполяционного полинома (2.1) положительны. В монографии (Белоусов С.Л. и др., 1968) специально отмечается, что наличие отрицательных весов не должно вызывать подозрений, но по возможности должно быть устранено. Среди возможных причин этого явления указываются «экранирование» влияющей станции, неточности определения корреляционной функции и, наконец, плохая обусловленность корреляционных матриц, что представляется наиболее вероятным. Для уменьшения этого эффекта предлагается увеличивать диагональные элементы нормированной корреляционной матрицы, прибавляя к ним число  $\eta$ . В данном случае  $\eta$  было принято равным 0,02. Умножив диагональные элементы корреляционной матрицы на 1,02 и решив 15 систем линейных уравнений, получим новые весовые коэффициенты для оптимальной интерполяции и с учетом ошибок наблюдений (табл. 2.4). Сравнивая данные табл. 2.4 и 2.3, убеждаемся, что коррекция диагональных элементов привела к ожидаемому результату – отрицательные коэффициенты хотя и не исчезли, но стали значительно меньшими по абсолютной величине. Однако проверка на независимом материале (столбец 3 табл. 2.2) показывает, что, несмотря на уменьшение абсолютных значений отрицательных коэффициентов регрессии, коррекция лишь ухудшила расчетную схему. Средний для 15 станций коэффициент корреляции между фактическими и расчетными величинами уменьшился с 0,620 до 0,607 (табл. 2.2). Рассмотренный здесь метод оптимальной интерполяции с коррекцией по алгоритму решения задачи идентичен методу гребневой регрессии. Применение метода гребневой регрессии для построения моделей «погода–урожай» будет рассмотрено в следующем разделе.

Таблица 2.1

**Коэффициенты интерполяционного полинома, полученные методом  
квадратического программирования**

Номер узла	Номер метода					
	1	2	3	4	5	6
1	0,110	0,425	0	0,140	0,030	0
2	0,204	0,189	0,003	0	0,100	0,581
3	0,109	0,052	0,029	0,149	0,156	0
4	0,151	0	0,571	0,133	0,068	0,008
5	0	0,304	0	0,037	0,030	0
6	0	0,592	0	0,034	0,049	0
7	0	0,150	0	0,592	0	0
8	0	0	0,101	0,451	0,054	0
9	0	0,410	0,160	0,125	0	0,003
10	0,342	0	0,095	0,298	0	0,232
11	0,109	0,195	0,007	0,333	0,088	0
12	0	0,093	0	0,577	0	0
13	0,103	0,594	0,054	0,051	0,022	0,009
14	0,035	0	0,236	0,313	0,041	0,112
15	0,053	0,299	0,427	0,155	0,042	0

Таблица 2.2

**Результаты проверки различных схем объективного анализа  
на независимом материале**

I – регрессия с неотрицательными коэффициентами, II – оптимальная интерполяция, III – оптимальная интерполяция с коррекцией, IV – классическая регрессия

Номер узла	Номер метода			
	I	II	III	IV
1	0,680	0,609	0,595	0,447
2	0,773	0,760	0,774	0,464
3	0,720	0,685	0,685	0,107
4	0,628	0,695	0,698	0,466
5	0,668	0,689	0,548	0,521
6	0,700	0,664	0,676	0,398
7	0,560	0,490	0,381	0,330
8	0,651	0,486	0,489	0,143
9	0,693	0,564	0,558	0,453
10	0,543	0,332	0,340	0,241
11	0,618	0,659	0,667	0,461
12	0,776	0,694	0,605	0,266
13	0,800	0,573	0,688	0,464
14	0,603	0,606	0,611	0,191
15	0,791	0,787	0,788	0,647
Среднее значение $r_i$	0,685	0,620	0,607	0,373

Таблица 2.3

**Коэффициенты интерполяционного полинома, полученные методом оптимальной интерполяции**

Номер узла	Номер метода					
	1	2	3	4	5	6
1	0,071	0,361	0,191	-0,013	0,080	0,034
2	0,319	0,134	0,356	-0,054	0,305	0,230
3	0,096	-0,013	0,100	0,092	0,336	0,120
4	0,172	-0,030	0,311	0,274	0,170	0,017
5	0,017	0,225	0,079	0,002	0,047	-0,039
6	0,033	0,417	0,167	-0,020	0,079	-0,036
7	-0,190	0,245	0,140	0,231	0,038	-0,032
8	0,062	0,021	0,124	0,221	0,087	-0,053
9	0,099	0,297	0,266	-0,006	0,042	0,119
10	-0,289	0,154	0,045	0,094	0,355	0,652
11	0,059	0,212	0,225	0,147	0,031	-0,099
12	0,065	0,082	0,139	0,281	0,040	-0,112
13	0,300	0,466	-0,464	0,312	0,053	-0,181
14	0,102	0,002	0,179	0,288	0,111	-0,031
15	0,143	0,226	0,442	0,085	0,054	0,037

Таблица 2.4

**Коэффициенты интерполяционного полинома, полученные методом оптимальной интерполяции с коррекцией**

Номер узла	Номер метода					
	1	2	3	4	5	6
1	0,072	0,351	0,185	-0,005	0,078	0,038
2	0,317	0,135	0,345	-0,041	0,301	0,225
3	0,100	-0,010	0,101	0,092	0,328	0,118
4	0,171	-0,024	0,304	0,269	0,168	0,022
5	0,018	0,218	0,076	0,006	0,045	-0,034
6	0,036	0,395	0,161	-0,010	0,075	-0,026
7	-0,180	0,237	0,139	0,224	0,037	-0,027
8	0,061	0,023	0,122	0,214	0,085	-0,047
9	0,099	0,290	0,257	0,002	0,044	0,119
10	-0,264	0,146	0,056	0,089	0,352	0,626
11	0,059	0,208	0,217	0,147	0,310	-0,090
12	0,063	0,082	0,137	0,273	0,039	-0,102
13	0,283	0,455	-0,439	0,300	0,145	-0,063
14	0,101	0,006	0,177	0,280	0,109	-0,024
15	0,144	0,222	0,426	0,092	0,056	0,040

В заключение, чтобы наш анализ возможных схем объективного анализа был полным, рассмотрим результаты применения классического

регрессионного анализа. Полученные оценки коэффициентов регрессии приведены в табл. 2.5. Для всех станций, включая 15-ю, имеются отрицательные весовые коэффициенты, причем число их возросло примерно в два раза по сравнению с обычной оптимальной интерполяцией (табл. 2.3). Средний коэффициент корреляции между вычисленными и фактическими суммами осадков оказался самым низким по сравнению со всеми другими рассмотренными схемами.

Таблица 2.5

**Коэффициенты интерполяционного полинома, полученные на основании классического регрессионного анализа**

Номер узла	Номер метода					
	1	2	3	4	5	6
1	0,410	0,333	0,422	-0,281	-0,001	-0,181
2	-0,314	0,160	0,246	0,132	-0,164	0,973
3	0,404	0,034	-0,172	0,358	0,078	-0,080
4	0,032	-0,176	0,702	-0,058	0,197	0,050
5	0,693	0,248	-0,174	-0,101	0,100	-0,349
6	0,708	0,434	0,056	-0,252	0,067	-0,274
7	1,251	0,349	0,422	-0,150	0,299	-0,666
8	0,852	0,271	0,313	-0,020	0,287	-0,471
9	0,087	-0,118	0,305	0,008	0,108	-0,041
10	-0,011	0,013	0,171	0,290	0,021	0,292
11	0,604	-0,067	0,784	-0,310	0,032	-0,233
12	1,028	-0,219	0,453	-0,293	0,202	-0,192
13	0,519	0,496	0,154	0,182	0,040	-0,143
14	0,509	-0,162	0,173	0,170	0,047	-0,080
15	0,407	0,091	0,449	-0,126	0,233	-0,274

Итак, оценивая качество схемы объективного анализа средним по полю коэффициентом корреляции между фактическими и вычисленными значениями метеозлемента на независимом материале, необходимо расположить рассмотренные схемы в следующем порядке:

- регрессия с неотрицательными коэффициентами – 0,685
- оптимальная интерполяция – 0,620
- оптимальная интерполяция с коррекцией – 0,607
- классический регрессионный анализ – 0,373.

Эти результаты позволяют признать самым эффективным методом регрессию с ограничениями на коэффициенты. Этот метод позволяет достаточно просто в форме системы ограничений на коэффициенты учитывать разнообразную априорную информацию о моделируемом объекте, включая значимость влияющих факторов, возможные связи между ними и многое другое. Классический регрессионный анализ вряд ли следует использовать для решения рассмотренной задачи.

## 2.2. Модели гребневой регрессии

Процедура построения гребневой регрессии была предложена в 1962 г. А.Э. Хоэрлом для использования в условиях мультиколлинеарности, которая является одним из основных препятствий применения аппарата регрессионного анализа. Что такое мультиколлинеарность, как и чем ее измеряют? Под мультиколлинеарностью понимают коррелированность или «сопряженность независимых переменных». Мультиколлинеарность называют сильной (harmfull), если оценки параметров регрессии зависят скорее от взаимосвязей независимых переменных (предикторов) регрессии, чем от зависимостей между  $y$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В качестве показателя мультиколлинеарности может выступать величина

$$\max |r_{ij}|, \quad i \neq j,$$

где  $r_{ij}$  – элементы корреляционной матрицы предикторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Для выявления сильной мультиколлинеарности может быть использовано условие: коэффициент корреляции одной из пар независимых переменных по абсолютной величине должен превышать какой-либо из коэффициентов корреляции между зависимой переменной  $y$  и предикторами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$|r_{ij}| (i \neq j) > |r_{ij}| (i = 1, 2, \dots, n).$$

При сильной коррелированности предикторов (при наличии приближенной линейной зависимости между ними) корреляционная матрица предикторов становится плохо обусловленной, т.е. близкой к вырожденной, имеющей нулевой определитель. Таким образом, определитель корреляционной матрицы может выступать в качестве меры мультиколлинеарности.

При увеличении степени мультиколлинеарности по каждому из рассматриваемых признаков точность оценивания коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов убывает.

Для выявления «плохой обусловленности» предлагается несколько практических действий (Дрейпер Н.Р., Смит Г., 2007):

- проверить, не имеют ли некоторые коэффициенты регрессии неверный знак исходя из общего представления о задаче;
- проверить, не получилось ли так, что наиболее важные предикторы имеют коэффициенты с малыми значениями  $t$ -статистики;
- проверить, не приводит ли удаление строки или столбца из матрицы значений предикторов к неожиданно большим изменениям подобранной зависимости;
- проверить парные корреляции между предикторными переменными и выяснить, нет ли среди них слишком больших значений.

Главной целью метода гребневой регрессии (ridge – гребень, хребет) является преодоление малой устойчивости оценок коэффициентов

регрессионной модели, полученных обычным методом наименьших квадратов.

В методе наименьших квадратов оценку коэффициентов можно получить по формуле:

$$\hat{\beta} = (X^* X)^{-1} X^* Y,$$

где все переменные стандартизованы;  $X^* X$  – корреляционная матрица предикторов;  $X^*$  – операция транспонирования вектора  $X$ ;  $\hat{\beta}$  – вектор коэффициентов регрессии в стандартизованном масштабе. Оценка коэффициентов методом гребневой регрессии представляется формулой:

$$\hat{\beta} = (X^* k I)^{-1} X^* Y,$$

где  $kI$  – произведение малого положительного числа  $k$  и единичной матрицы  $I$ . Это означает, что малая положительная величина добавлена к каждому диагональному элементу корреляционной матрицы.

Эта операция повышает обусловленность корреляционной матрицы и делает более устойчивыми оценки коэффициентов регрессии. Важнейший вопрос при использовании метода гребневой регрессии – выбор параметра  $k$ . Необходимо выбирать такое наименьшее значение  $k$ , при котором коэффициенты стабилизируются и при дальнейшем росте  $k$  изменяются мало. Обычно  $k$  выбирают меньше 0,5. При  $k = 0$  получаем коэффициенты метода наименьших квадратов. В отличие от метода наименьших квадратов, дающих несмещенные оценки коэффициентов регрессии, в модели гребневой регрессии оценки смещенные, но при этом они имеют меньшую дисперсию. Ошибка коэффициента складывается из двух составляющих: смещения и дисперсии. Смещенное оценивание оказывается полезным, если ценой небольшого смещения достигается значительное уменьшение дисперсии.

Рассмотрим пример построения гребневой регрессии из книги Е.С. Улановой и В.Н. Забелина (1990). Для прогнозирования урожайности всех зерновых культур в Североказахстанской области использовались 8 предикторов: сумма осадков и температура воздуха за первую декаду мая и за три декады июня ( $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$ ) и ( $t_1, t_2, t_3$  и  $t_4$ ) соответственно. В условиях недостаточного увлажнения все коэффициенты при осадках должны быть положительными, а при температуре воздуха – отрицательными. Полученная методом наименьших квадратов модель имеет вид:

$$\hat{y} = -0,105R_1 - 0,091R_2 + 1,294R_3 + 0,500R_4 + 0,559t_1 - 0,904t_2 + 0,138t_3 - 0,508t_4. \quad (2.4)$$

Таким образом в уравнении (2.4) при  $k = 0$  половина коэффициентов имеют «ошибочные» знаки. При  $k > 0,5$  все коэффициенты становятся практически постоянными и приобретают «правильные знаки». Уменьшение изменчивости коэффициентов начинает проявляться в интервале  $0,2 < k < 0,4$ . Поэтому в качестве стабилизирующего для  $k$  взято значение  $k = 0,3$ . Этому значению гребневого параметра соответствует уравнение



$$\hat{y} = 0,041R_1 + 0,070R_2 + 0,038R_3 + 0,288R_4 - 0,036t_1 - 0,0249t_2 - 0,044t_3 - 0,249t_4 - 0,015. \quad (2.5)$$

В отличие от (2.4), все коэффициенты уравнения (2.5) имеют физически интерпретируемые знаки, что тем не менее не гарантирует успешность их практического применения.

Использование гребневой регрессии, как и других альтернативных методов, требует проверки на независимом материале. В данном случае исходная выборка из 23 лет наблюдений была разбита на два временных ряда. Первый ряд, по которому строились модели, включал 19 лет, а второй – для проверки моделей на независимом материале – 4 года. Средне-квадратическая ошибка прогноза для уравнения (2.4) оказалась равной 1,49, а для (2.5) – всего 0,98 ц/га, т.е. ошибка уменьшилась на 34 %, что свидетельствует о преимуществе метода гребневой регрессии. Проверка могла бы дать более убедительные результаты, если бы исходный ряд был разделен на равное число лет (например, уравнение строилось на данных за четные годы, а проверялось на данных за нечетные годы).

Приведенный пример достаточно показателен и убедителен. Использование метода гребневой регрессии позволяет в ряде случаев повысить точность агрометеорологических прогнозов без особых дополнительных затрат труда. Необходимо лишь внимательно отнестись к процедуре проверки полученной прогностической зависимости на независимом материале, которая должна быть достаточно надежной.

Мультиколлинеарность при идентификации регрессионных зависимостей есть не вопрос существования, а вопрос степени, поэтому ее анализ и устранение возможных негативных последствий – необходимый этап построения прогностических зависимостей.

### **2.3. Метод главных компонент**

Появление необходимых пакетов статистических программ устранило трудности, связанные с использованием многомерного статистического анализа, и сделало его легко применимым в агрометеорологических исследованиях. Стало возможным при построении прогностических схем учитывать не две-три, а несколько десятков или даже сотен гидрометеорологических переменных.

Разработка таких схем – перспективное направление развития агрометеорологической прогностики. Наиболее значительных результатов можно ожидать в области совершенствования и создания новых методов прогнозирования урожая. Многомерные регрессионные схемы дают возможность более полно и дифференцированно по времени учитывать влияние комплекса гидрометеорологических условий, а также значительно полнее, чем это было возможно ранее, привлекать данные об агротехнике и плодородии почв.

Однако реализация этих возможностей происходит медленно, многомерные прогностические схемы еще не нашли широкого применения на практике. Основная причина такого положения заключается в том, что классический регрессионный анализ во многих случаях оказывается плохо приспособленным для решения агрометеорологических задач. Так, при построении статистических схем для прогноза урожая типичной является ситуация, когда число переменных, описывающих гидрометеорологические условия дифференцированно по отдельным отрезкам вегетационного периода, приближается к числу лет наблюдений. В этом случае получение статистически устойчивых зависимостей с помощью обычного регрессионного анализа становится весьма проблематичным. Применение для формирования выборки способа «годостанций» хотя и может несколько увеличить информационную ценность выборки, но отнюдь не пропорционально числу станций, ряды наблюдений которых при этом объединяют.

В результате применения этого способа получается связанная выборка. Напомним, что одним из предположений, на которых основан регрессионный анализ, является предположение о статистической независимости элементов выборки. Влияние связности выборки равносильно уменьшению ее объема, которое можно оценить, заменив  $n$  (число годостанций) числом эквивалентно-независимых наблюдений  $n_e$  ( $n_e \leq n$ ). Вопрос о том, как рассчитать  $n_e$  для той или иной статистики, мы здесь не рассматриваем, отсылая читателя к специальным работам (Сиротенко О.Д., 1969). Отметим, что  $n_e$  может оказаться немногим больше числа лет наблюдений, несмотря на то, что для составления выборки взяты наблюдения большой группы станций.

Весьма важным обстоятельством, затрудняющим применение обычного регрессионного анализа, является сильная корреляция между переменными, описывающими гидрометеорологические условия вегетационного периода.

Солнечная радиация, температура, влажность воздуха, осадки, влагозапасы почвы, взятые в виде сумм или средних за отрезки вегетационного периода любой продолжительности, связаны между собой, и эта корреляция легко объяснима с физической точки зрения.

Кроме «синхронной» корреляции между различными параметрами за один и тот же отрезок времени не менее существенно влияние «асинхронной» корреляции между параметрами, относящимися к разным временным интервалам, например, корреляция между температурой воздуха или влагозапасами почвы за смежные декады, корреляция между температурой и дефицитом влажности за смежные декады и т.д. Эта корреляция обуславливается инерцией метеорологических процессов, а также инерцией показателей, характеризующих состояние посевов и корневобитаемого слоя почвы.

Характерно, что чем более детально мы будем пытаться описать гидрометеорологические условия, дробя вегетационный период на все более мелкие подпериоды, тем сильнее будет проявляться коррелированность «независимых» переменных (предикторов) соответствующих уравнений регрессии.

Чем больше предикторных переменных, чем теснее связь между ними, тем более вероятно, что соответствующая система нормальных уравнений окажется плохо обусловленной. Решение систем такого типа отличается большой чувствительностью к малым изменениям исходных данных. Если к этому добавить, что элементы корреляционной матрицы при небольшой выборке (несколько десятков наблюдений) определяются в статистическом смысле очень неточно, то становится ясно, что в такой ситуации «точное» решение системы может быть крайне неустойчивым и резко отличаться от представлений о нем, следующих из физического анализа задачи. Чтобы конкретизировать это утверждение, рассмотрим пример, рассмотренный Е. Гоэрлом (Hoerl E, 1962), где  $\hat{y}$  является линейной функцией от предикторов:

$$\hat{y} = 10 + 2x_1 + 3x_2 + 5x_3. \quad (2.6)$$

К точным значениям  $\hat{y}$ , вычисленным по уравнению (2.6), прибавлена некоторая случайная величина  $\sigma$  («ошибка измерений»), в результате чего получена переменная  $y = \hat{y} + \sigma$  (табл. 2.6). Величины  $x_1, x_2, x_3$  сильно коррелируют друг с другом ( $r_{1,2} = 0,985$ ;  $r_{1,3} = 0,931$ ;  $r_{2,3} = 0,915$ ).

Таблица 2.6

Исходные данные к примеру Е. Гоэрла

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\hat{y}$	Ошибка $\sigma$	$y$
1,1	1,1	1,2	21,5	0,8	22,3
1,4	1,5	1,1	22,8	-0,5	22,3
1,7	1,8	2,0	28,8	0,4	29,2
1,7	1,7	1,8	27,5	-0,5	27,0
1,8	1,9	1,8	28,3	0,2	28,5
1,8	1,8	1,9	28,5	1,9	30,4
1,9	1,8	2,0	29,2	1,9	31,1
2,0	2,1	2,1	30,8	0,6	31,4
2,3	2,4	2,5	34,3	-1,5	32,8
2,5	2,5	2,4	34,5	-0,5	34,0

Предположим, что точные значения  $\hat{y}$  не известны, известны лишь величины  $y$ , измеренные с ошибками. Попытаемся с помощью регрессионного анализа восстановить не известное нам уравнение (2.6). Обыкновенный регрессионный анализ приводит к уравнению

$$y = 12,11 + 8,27 x_1 - 5,52 x_2 + 6,39 x_3. \quad (2.7)$$

Сопоставляя уравнения (2.6) и (2.7), убеждаемся, что полученное решение (2.7) совершенно не похоже на точное (2.6). Уравнение (2.7) нельзя использовать даже для качественной оценки роли каждой отдельной независимой переменной. Примеры подобных некорректных уравнений регрессии можно найти в агрометеорологических работах.

Таким образом, в ряде случаев применение классического регрессионного анализа для исследования влияния гидрометеорологических условий на формирование урожая и для построения соответствующих многомерных прогностических схем не может дать должного результата. О.Д. Сиротенко (1969) предложено применять в этих случаях компонентный анализ. Этот метод позволяет в какой-то мере преодолеть трудности, возникающие при применении регрессионного анализа в указанной области при большом количестве учитываемых факторов, сильной корреляции между ними и малом числе наблюдений.

Метод разложения по собственным векторам, или, как обычно его называют, метод разложения по естественным составляющим, нашел широкое применение в метеорологии (Мещерская А.А. и др., 1970). С неменьшей пользой он может быть использован и в агрометеорологических исследованиях.

### Основы компонентного анализа

Факторы, влияющие на урожай или любую другую прогнозируемую величину (предиктант), можно представить в виде  $n$ -мерного случайного вектора (вектора-предиктора)

$$X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Наборы чисел, характеризующие агрометеорологические условия того или иного года, будут представлять собой его конкретные реализации. Исходные данные о предикторах удобно представить в виде матрицы  $N \times n(x_{ij})$ , а о предиктанте – в виде  $N \times 1(y_i)$  :

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_N \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где  $N$  – число лет или случаев наблюдений;  $n$  – число предикторов. Предположим, что все переменные предварительно центрированы и стандартизованы, т.е. преобразованы следующим образом:

$$x_1 = \frac{x'_1 - \bar{x}_1}{\sigma_1}, \dots, x_n = \frac{x'_n - \bar{x}_n}{\sigma_n}, \quad y = \frac{y' - \bar{y}}{\sigma_y},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n, y$  – наблюдаемые величины;  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}$  – их средние значения;  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_y$  – средние квадратические отклонения.

Если компоненты вектора  $X$  обозначают однородные физические величины (например среднюю температуру воздуха за отдельные периоды вегетации) и дисперсии их не отличаются существенно друг от друга, к стандартизованным величинам переходить не обязательно. В этом случае полная проблема собственных значений решается для ковариационной ( $m_{ij}$ ) матрицы, а не для корреляционной ( $r_{ij}$ ). Именно в такой форме чаще всего и применяется компонентный анализ. Однако при решении агрометеорологических задач, по-видимому, целесообразно переходить к стандартизованным величинам, поскольку корреляционная матрица менее изменчива, чем ковариационная, что существенно при малых выборках. В общем случае вместо  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  можно использовать любой набор масштабных коэффициентов  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , которые рекомендуется выбирать таким образом, чтобы масштабированные переменные  $\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \dots, \frac{x_n}{s_n}$  вносили примерно одинаковый вклад в уравнение регрессии. Эту возможность следует иметь в виду, когда есть существенные физические соображения о роли того или иного фактора.

Уравнение регрессии в матричной форме можно записать как:

$$\hat{y} = L^* X = Q^* C^{-1} X, \quad (2.9)$$

где  $L$  – вектор коэффициентов регрессии в стандартизованном масштабе;  $X$  – вектор-предиктор;  $C^{-1}$  – матрица, обратная корреляционной матрице предикторов;  $Q$  – вектор, составленный из коэффициентов корреляции между предиктантом и составляющими вектора  $X$ .

Матрица  $C$  и вектор  $Q$  имеют вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} r_{yx_1} \\ r_{yx_2} \\ \cdot \\ r_{yx_n} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Матрицу  $C$  и вектор  $Q$  можно рассчитать с помощью программы определения матрицы коэффициентов корреляции или же воспользоваться стандартной программой умножения матриц, реализуя:

$$C = \frac{1}{N} (x_{ij}^*) (x_{ij}), \quad Q = \frac{1}{N} (x_{ij}^*) (y_i). \quad (2.11)$$

Пусть  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $C$ .  $U_1, U_2, \dots, U_n$  – соответствующие ортонормированные собственные векторы. Матрицу, составленную из собственных векторов  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , обозначим  $U$ , тогда:

$$U^* U = U U^* = E_n, \quad (2.12)$$

где  $E_n$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Перейдем теперь от исходного набора переменных  $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  к новому набору переменных  $A^* = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  посредством преобразования:

$$A = UX. \quad (2.13)$$

Переменные  $a$  называются главными компонентами переменных  $x$ . Дисперсии переменных  $a_i$  равны соответствующим собственным числам матрицы  $C$ .

$$\delta_{a_i}^2 = \lambda_i. \quad (2.14)$$

Новые переменные обладают следующим экстремальным свойством. Дисперсия  $a_1$  является максимально возможной дисперсией для любой переменной, представляющей собой линейную комбинацию вида:

$$a_i = \sum_{i=1}^n u_i x_i, \quad (2.15)$$

при условии нормировки весов:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1. \quad (2.16)$$

Дисперсия  $a_2$  является максимальной среди всех комбинаций вида (2.1), не коррелированных с первой, и т.д. Благодаря этому свойству главные компоненты являются в некотором смысле наилучшими линейными функциями для описания изменений случайного вектора  $X$  от реализации к реализации или, имея в виду нашу задачу, наилучшими линейными функциями для описания изменений условий произрастания сельскохозяйственных культур от года к году.

Первые  $q$  главных компонентов учитывают из полной вариации переменных  $\sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2$  долю, равную:

$$\xi_q = \frac{\sum_{i=1}^q \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \quad (2.17)$$

С возрастанием  $q$   $\xi_q$  растет и в случае сильной коррелированности факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  быстро приближается к единице. Это позволяет с достаточной для практики точностью принять  $\xi_q \approx 1$  для некоторого  $q < n$ , что дает возможность вместо исследования  $n$ -коррелированных переменных заняться исследованием в несколько раз меньшего числа  $q$ -некоррелированных переменных.

Начиная с работ Н.А. Багрова (1959) и др., такой подход получил широкое распространение при анализе различных метеорологических полей. Исходя из опыта применения компонентного анализа для решения метеорологических задач, можно предположить, что он найдет широкое применение в агрометеорологии, причем не только для решения прогностических задач.

В качестве примера можно назвать следующие задачи такого рода. Объективная типизация лет по агрометеорологическим условиям произрастания той или иной культуры, отыскание лет-аналогов, агроклиматическое районирование и т.д. Математическая сторона всех этих задач, по существу, сводится к исследованию структуры корреляционных (ковариационных) матриц. Допустим, что мы имеем  $n$  количественных характеристик  $x_i$  (метеорологических, биологических, агротехнических), которые описывают каждый из  $N$  рассматриваемых объектов (объектом может быть сельскохозяйственная культура на данном поле, отдельное растение, станция, район и т.д.).

Исходную информацию, как и прежде, можно представить в виде матрицы  $N \times n$ . Пусть задача состоит в том, чтобы разделить (классифицировать) эти  $N$  многопараметрических объектов на несколько групп в соответствии с их свойствами. Основные трудности в решении таких задач, вызываемые многомерностью и коррелированностью характеристик изучаемых объектов, могут быть преодолены с помощью компонентного анализа.

Вычислим корреляционную (или ковариационную) матрицу, решим для нее полную проблему собственных значений и перейдем от исходного набора характеристик  $x_1, x_2, \dots, x_n$  к новому набору  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Очень часто оказывается (это зависит от степени коррелированности  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), что несколько первых коэффициентов разложения (например,  $a_1$  и  $a_2$ ) несут основную часть информации об объекте (скажем, 80–90 %). Коэффициенты разложения пронумерованы в порядке убывания их собственных чисел. Следовательно, вместо  $n$  исходных переменных мы получаем возможность изучать один-два коэффициента разложения, рассматривая их как оптимальные в определенном смысле комплексные характеристики изучаемых объектов. Строя графики коэффициентов разложения или картируя их, мы можем теперь решать задачу классификации простыми способами. Новые характеристики объектов, в отличие от исходных, обладают очень ценным свойством – некоррелированностью, что значительно упрощает их использование. Вернемся к основной области применения компонентного анализа – прогностическим зависимостям.

Итак, от исходного набора предикторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  мы перешли к новому набору  $a_1, a_2, \dots, a_n$  предикторов – коэффициентов разложения случайного вектора  $X$  по собственным векторам его корреляционной матрицы. Отберем среди  $a_1, a_2, \dots, a_n$  несколько коэффициентов ( $p$ ), наиболее информативных для прогнозирования  $y$ , и построим соответствующее уравнение регрессии:

$$\hat{y} = l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_p a_p. \quad (2.18)$$

Н.А. Багров (1968) показал, что для получения коэффициентов уравнения (2.18) нет необходимости непосредственно рассчитывать значения

переменных  $a_1, a_2, \dots, a_p$ . Коэффициенты  $l_1, l_2, \dots, l_p$  можно найти непосредственно по формуле:

$$l_i = \frac{1}{\lambda_i} Q^* U_i. \quad (2.19)$$

Соответствующий  $l_i$  парный коэффициент корреляции равен:

$$r_{ya_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Q^* U_i. \quad (2.20)$$

Множественный коэффициент корреляции благодаря некоррелированности главных компонент определяется особенно просто:

$$R_{ya_1, a_2, \dots, a_p} = \sqrt{\sum_{i=1}^p r_{ya_i}^2}. \quad (2.21)$$

Если возвратиться к исходным переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , уравнение (2.18) следует записать так:

$$\hat{y} = \left( \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} Q^* U_i U_i^* \right) X. \quad (2.22)$$

Выражение в скобках представляет собой вектор коэффициентов регрессии, т.е.

$$\sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} Q^* U_i U_i^* = L_p^*. \quad (2.23)$$

Компонентный анализ вместо одного «классического» уравнения регрессии позволяет на том же материале наблюдений построить, по крайней мере,  $n$  прогностических зависимостей. Действительно, учитывая лишь один наиболее информативный коэффициент разложения  $a_1$ , получим:

$$\hat{y} = \left( \frac{1}{\lambda_1} Q^* U_1 U_1^* \right) X = L_1^* X, \quad (2.24)$$

учитывая, кроме  $a_1$ , еще и  $a_2$ ,  $\hat{y} = \left( \frac{1}{\lambda_1} Q^* U_1 U_1^* + \frac{1}{\lambda_2} Q^* U_2 U_2^* \right) X = L_2^* X$ .

И, наконец, введя последний коэффициент разложения  $a_n$ , получим уравнение:

$$\hat{y} = \left( \frac{1}{\lambda_1} Q^* U_1 U_1^* + \frac{1}{\lambda_2} Q^* U_2 U_2^* + \dots + \frac{1}{\lambda_n} Q^* U_n U_n^* \right) X = L_n^* X, \quad (2.25)$$

совпадающее с обычным уравнением регрессии (2.9), т.е.  $L_p = L$  при  $p = n$ .

Обычное уравнение регрессии (2.9) можно рассматривать как частный случай уравнения (2.22). Следовательно, суть преимуществ, которые может дать компонентный анализ, по сравнению с обычным подходом, заключается в возможности отбрасывать часть коэффициентов разложения вектора-предиктора. Вопрос о том, какие из коэффициентов разложения  $a_1, a_2, \dots, a_n$  отбросить, а какие ввести в прогностическую зависимость,



имеет первостепенное значение. Нужно определить, какие из новых переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  несут прогностически ценную информацию, а какие лишь ее «засоряют» и должны быть отброшены. Предложено несколько принципов отбора коэффициентов разложения для построения прогностических зависимостей. Представляется наиболее целесообразной следующая процедура отбора:

1. По формуле (2.20) рассчитать парные коэффициенты корреляции между  $y$  и каждым из коэффициентов разложения  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и расположить их в порядке убывания абсолютных величин  $|r_{y,a_i}|$ .

2. По формуле (2.21) рассчитать несколько первых множественных коэффициентов корреляции  $r_{ya_1}, R_{ya_1a_2}, \dots$ .

3. Для  $r_{ya_1}, R_{ya_1a_2}, \dots$  по таблицам (см. Приложение) определить соответствующие им минимальные величины истинных коэффициентов корреляции при 5 %-ном уровне значимости  $-\bar{r}_{ya_1}, \bar{R}_{ya_1a_2}, \dots$ .

4. Определить коэффициент разложения  $a_p$ , с ввода которого величины  $\bar{r}_{ya_1}, \bar{R}_{ya_1a_2}, \dots$  перестают возрастать, тогда  $a_1, a_2, \dots, a_p$  и будут теми коэффициентами разложения, которые необходимо учесть для построения оптимального уравнения регрессии.

Напомним, что если мы перешли к стандартизованной форме представления переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и, следовательно, решали полную проблему собственных значений для корреляционной матрицы  $(r_{ij})$ , то и рассчитанные коэффициенты регрессии  $l_1, l_2, \dots, l_n$  будут в стандартизованном масштабе. Для возвращения к первоначальным масштабам достаточно каждый из них умножить на соответствующее отношение  $\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$ .

Процедуру отбора можно улучшить, придав ей менее формальный характер, если известны, хотя бы приближенно, соотношения между величинами отдельных коэффициентов регрессии или знаки некоторых из них.

### **Оценка влияния метеорологических условий на урожай с помощью компонентного анализа**

Применим компонентный анализ к рассмотренному выше примеру Е. Гозрла. На основании данных, помещенных в табл. 2.6, рассчитаем корреляционную матрицу  $C$  и вектор  $Q$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0,985 & 0,931 \\ 0,985 & 1 & 0,915 \\ 0,931 & 0,915 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0,938 \\ 0,906 \\ 0,907 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $C$  и вектора  $Q$  составлены из следующих коэффициентов корреляции:  $r_{x_1x_2} = 0,985$ ;  $r_{x_1x_3} = 0,931$ ;  $r_{x_2x_3} = 0,915$ ;  $r_{yx_1} = 0,938$ ;  $r_{yx_2} = 0,906$ ;  $r_{yx_3} = 0,907$ . Решив полную проблему собственных значений для  $C$ , получим:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0,5832 \\ 0,5800 \\ 0,5688 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} -0,3214 \\ -0,4782 \\ 0,8173 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} -0,7460 \\ 0,6594 \\ 0,0924 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа оказались равными  $\lambda_1 = 2,888$ ;  $\lambda_2 = 0,098$ ;  $\lambda_3 = 0,014$ . Сумма собственных чисел равна трем, т.е. сумме диагональных элементов матрицы  $C$ .

Определитель матрицы  $C$  невелик –  $2,888 \cdot 0,098 \cdot 0,014 = 0,004$ . Число обусловленности по отношению к вычислительной проблеме обращения матрицы (число Тодда) довольно велико:

$$P = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{2,888}{0,014} = 206,$$

хотя и не превышает критического значения – величины  $10^4$ . Линейная система, для которой число Тодда превышает величину  $10^4$ , как правило, не пригодна для определения искоемых неизвестных. В нашем случае значение числа обусловленности приближается к его критическому значению, следовательно, ошибки в исходных данных могут в значительной степени исказить решение, что, собственно, и происходит. В этом легко убедиться, сравнив уравнения (2.6) и (2.7).

По формуле (2.20) вычислим коэффициенты корреляции между  $y$  и коэффициентами разложения  $a_1, a_2, a_3$ . Они оказались следующими:

$$r_{ya_1} = 0,956; \quad r_{ya_2} = 0,185; \quad r_{ya_3} = 0,100.$$

Выбор наиболее информативных коэффициентов разложения для построения зависимости в данном случае не представляет никаких затруднений: один из коэффициентов корреляции резко выделяется, по сравнению с остальными, –  $r_{ya_1} = 0,956$ ; корреляция двух других с  $y$  не отличается существенно от нуля. В данном случае нумерация по величинам собственных чисел совпала с нумерацией по степени коррелированности с  $y$ .

Первый коэффициент разложения  $a_1$  несет около 96 %  $\left( \frac{2,89}{3} \cdot 100 \right)$  всей информации о независимых переменных.

Для того чтобы получить уравнение регрессии, связывающее  $y$  с  $a_1$ , достаточно, согласно (2.19), умножить  $Q^*$  на  $U_1$ , результат разделить на  $\lambda_1$ :

$$l_1 = \frac{1}{2,888} (0,938 \cdot 0,5832 + 0,906 \cdot 0,58 + 0,907 \cdot 0,5688) = 0,562,$$

и записать  $y = 0,562 l_1$ .

Свободный член этого уравнения равен нулю, поскольку  $\bar{a}_1 = 0$ , а  $y$  представлен в стандартизованном масштабе, т.е.  $\bar{y} = 0$ ,  $\sigma_y = 1$ . Для перехода от переменных  $a_1, a_2, \dots, a_p$  к  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подставим в это уравнение выражение для коэффициента разложения  $a_1 = U^* X$  и рассчитаем вектор коэффициентов регрессии:

$$L_1 = 0,562 \begin{pmatrix} 0,5832 \\ 0,5800 \\ 0,5688 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,328 \\ 0,326 \\ 0,320 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно записать:

$$y = 0,328x_1 + 0,326x_2 + 0,320x_3.$$

Перейдем от стандартизованного к естественному масштабу представления переменных и получим окончательно уравнение

$$y' = 3,276x'_1 + 3,207x'_2 + 2,865x'_3 + 11,6. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) значительно ближе к точному (2.6), чем классическое уравнение регрессии (2.7). В отличие от (2.7), уравнение (2.26) правильно отражает характер влияния переменной  $x_2$ .

Отметим, что учет следующего коэффициента разложения  $a_2$  приводит к заметному ухудшению решения; коэффициенты регрессии при этом становятся равными 1,37 0,42 и 7,20 соответственно.

Рассмотрим конкретный пример использования компонентного анализа, возникший в процессе исследований по разработке физико-статистической схемы для прогноза урожая озимой пшеницы в Нечерноземной зоне Российской Федерации. Анализировалось влияние метеорологических условий весенне-летнего периода вегетации на урожай озимой пшеницы, привлекались данные Калужского сортоучастка за 1945–1964 гг. ( $N = 21$ ).

Принята следующая схема учета погодных условий. Весенне-летний период вегетации разделен на 11 частей: период от возобновления вегетации до выхода в трубку разбит на две равные части, межфазные периоды – выход в трубку-колошение и колошение-молочная спелость – разделены на четыре равные части каждый и, наконец, 11-я часть представляет собой период от молочной спелости до уборки.

Подпериоды пронумерованы, как показано в табл. 2.7. Средняя продолжительность их составляет: I и II – по 15, а III–XI – по 7–8 дней. В каждом году в зависимости от темпов развития продолжительность подпериодов меняется.

Разбивая межфазные периоды на равные части, мы стремимся к тому, чтобы каждый подпериод соответствовал какому-либо этапу онтогенетического развития растений вне зависимости от продолжительности соответствующего межфазного периода в конкретном году.

Ограничимся в качестве примера рассмотрением влияния на формирование урожая лишь одного метеорологического параметра – дефицита влажности воздуха в 13 час.

Независимые переменные (компоненты вектора-предиктора  $X$ ) в данном случае суть средние значения дефицита влажности воздуха в 13 час

за каждый из 11 подпериодов. Как и в рассмотренном выше примере, рассчитаем прежде всего матрицу  $C$  и вектор  $Q$ . Элементы  $C$  представляют собой коэффициенты корреляции между предикторами  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ , элементы  $Q$  – коэффициенты корреляции между  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  и урожаем. В табл. 2.7 приведены результаты расчетов – элементы  $C$  и  $Q$  (последняя колонка таблицы).

Таблица 2.7

**Матрица коэффициентов корреляции системы предикторов  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  и вектор связей предикторов с предиктантами урожаем (Калужский сортоучасток,  $N = 21$ )**

Возобновление вегетации	Выход в трубку	Выход в трубку-колошение				Колошение-молочная спелость				Уборка	Урожай
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$y$
1	0,46	0,23	0,02	-0,05	-0,21	-0,07	-0,28	-0,30	-0,58	-0,04	-0,14
	1	0,51	0,17	-0,13	0,02	0,02	-0,30	-0,02	-0,29	0,12	0,17
		1	0,46	0,35	-0,03	-0,04	-0,22	-0,34	0,28	0,16	-0,39
			1	0,30	0,22	-0,04	0,08	-0,01	-0,07	-0,07	-0,49
				1	0,47	0,38	0,24	-0,25	-0,18	-0,23	-0,50
					1	0,62	0,60	0,24	0,25	0,18	-0,11
						1	0,41	0,06	0,07	0,10	-0,16
							1	0,51	0,23	0,40	0,05
								1	0,37	0,20	0,26
									1	0,26	0,23
										1	0,02
											1

Если ограничимся только анализом парных коэффициентов корреляции (составляющих вектора  $Q$ ), картина влияния дефицита влажности воздуха на формирование урожая представляется довольно сложной и несколько неопределенной. Действительно, коэффициенты корреляции многократно меняют знак и только два из них (с переменными  $x_4$  и  $x_5$  для периода выход в трубку-колошение) существенно отличаются от нуля. Коэффициенты корреляции, как известно, отражают влияние не только учитываемого фактора, но и всех других, корреляционно связанных с ним. В нашем случае между смежными по времени  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_2$  и  $x_3$ ,  $x_3$  и  $x_4$  и т.д. переменными заметна положительная корреляция, возникающая из-за инерционности крупномасштабных метеорологических процессов.

Собственные числа матрицы коэффициентов корреляции представлены в табл. 2.8, сумма их равна сумме диагональных элементов матрицы, т.е. 11.

Рассчитаем по формуле (2.20) оценки коэффициентов корреляции между урожаем и каждым из 11 главных компонентов. Эти коэффициенты корреляции представлены в табл. 2.8 и пронумерованы в порядке убывания их абсолютных значений или, другими словами, в порядке убывания их информативности как предикторов урожая. Как мы видим, нумерация по  $i$  (по убыванию дисперсий главных компонентов) и по  $t$  (по убыванию информативности для прогноза урожая) не совпадает. Это совершенно естественно, поскольку нумерация по  $i$  располагает главные компоненты в порядке убывания информации, которую они несут о самой системе предикторов, а нумерация по  $t$  – в порядке убывания информации о предиктанте. В последней колонке табл. 2.8 представлены множественные коэффициенты корреляции  $R_{ya_i}$ , получаемые при последовательном вводе в уравнение регрессии вида (2.22) переменных  $a_1, a_2, \dots$  в порядке убывания их вкладов (нумерация по  $t$ ) – 0,49; 0,64 и т.д.

Таблица 2.8

**Корреляционный анализ статистических связей коэффициентов разложения дефицита влажности воздуха (озимая пшеница)**

$i$	$\lambda_i$	$r_{ya_i}$	$t$	$R_{ya_i}$
1	3,02	-0,12	10	0,49
2	2,26	-0,49	1	0,64
3	1,54	0,23	5	0,69
4	1,18	0,23	4	0,73
5	0,88	-0,09	11	0,76
6	0,76	0,26	3	0,80
7	0,44	0,13	9	0,82
8	0,36	-0,15	8	0,83
9	0,27	0,22	6	0,84
10	0,17	-0,18	7	0,85
11	0,13	-0,41	2	0,85

Определим, используя таблицу (Вялов Е.А., Марченко А.С., 1969), пороговые значения истинных коэффициентов корреляции для  $r_{ya_1} = 0,49$ ,  $R_{ya_1, a_2, a_3} = 0,69$ ,  $R_{ya_1, a_2, \dots, a_5} = 0,76$ ,  $R_{ya_1, a_2, \dots, a_7} = 0,82$  при заданной вероятности 0,95. Они оказались равными 0,15, 0,33, 0,34 и 0,24 соответственно, минимальная величина истинного коэффициента множественной корреляции при переходе от схемы с пятью к схеме с семью предикторами уменьшилась от 0,34 до 0,24. Оптимальным, следовательно, нужно считать уравнение регрессии с учетом пяти коэффициентов разложения.

Итак, оптимальное уравнение регрессии, описывающее влияние дефицита влажности воздуха на урожай озимой пшеницы, по данным Калужского сортоучастка, имеет вид:

$$\hat{y} = -0,327a_1 - 1,107a_2 + 0,303a_3 + 0,215a_4 + 0,185a_5, \quad R = 0,76. \quad (2.27)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим коэффициенты регрессии, приведенные в табл. 2.9.

Таблица 2.9

**Коэффициенты регрессии, представляющие влияние дефицита влажности воздуха на урожай озимой пшеницы по данным Калужского (первая строка  $R = 0,76$ ) и Жиздринского (вторая строка  $R = 0,90$ ) сортоучастков**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$
-0,08	0,69	-0,35	-0,24	-0,22	-0,50	0,05	0,51	-0,27	0,39	-0,23
-0,30	0,66	-0,88	-0,39	-0,52	-0,03	0,38	-0,04	-0,57	-0,09	0,65

Как и при анализе парных коэффициентов корреляции (табл. 2.7), следует отметить сложный характер влияния дефицита влажности воздуха на формирование урожая: коэффициенты регрессии пять раз меняют знак. Влияние дефицита влажности воздуха в первую половину периода – возобновление вегетации-выход в трубку – характеризуется практически нулевым коэффициентом регрессии (-0,08). Вторая половина этого периода характеризуется довольно большим (0,69) положительным коэффициентом регрессии, это период интенсивного роста, который обычно проходит при достаточном увлажнении пахотного слоя почвы, поэтому знак и величина этого коэффициента для этого периода вполне объяснимы. Главная причина снижения урожая озимой пшеницы в Нечерноземной зоне – пересыхание пахотного слоя почвы, поскольку основная масса корневой системы сосредоточена в пахотном слое. В результате этого даже кратковременные периоды с высокой температурой воздуха и небольшим количеством осадков могут привести к снижению урожая. Этим и объясняются знаки коэффициентов регрессии для всего периода выход в трубку-колошение. Отрицательное влияние повышенных значений дефицита влажности воздуха достигает максимума в последнюю четверть периода, т.е. непосредственно перед колошением (-0,50).

С прекращением интенсивного роста после колошения потребность во влаге резко падает и на первый план выдвигаются условия формирования и налива зерна. Изменение потребности растений во влаге отражает смена знаков коэффициентов регрессии после колошения. Умеренно-теплая, сухая погода, по-видимому, положительно сказывается на процессах, происходящих во время цветения и непосредственно после него. Коэффициенты регрессии для этого периода положительны (0,05, 0,51). Во время налива зерна требования к погодным условиям несколько меняются: повышенная температура, высокие значения дефицита влажности воздуха могут вызвать «запал» зерна и снизить урожай.

Для оценки надежности результатов анализа следует стремиться получить аналогичные уравнения для возможно большего числа

сортаучастков, расположенных в пределах интересующего нас региона. Совместный анализ нескольких уравнений позволит сделать заключение о том, насколько точно каждое из них отражает характер влияния гидрометеорологических условий, и перейти в дальнейшем к выяснению роли факторов, не включенных в данное исследование, например роли почвенных разностей и т.п.

Аналогичное уравнение было получено для другого сортаучастка, расположенного на территории Калужской области, – Жиздринского. Использовались 19-летние ряды наблюдений. Как и в первом случае, оптимальным оказался вариант с учетом пяти коэффициентов разложения. Коэффициенты регрессии (в стандартизованном масштабе) при обычной форме представления переменных приведены в табл. 2.9. Множественный коэффициент корреляции для этого уравнения – 0,90, минимальное значение истинного коэффициента корреляции при 5 %-ном уровне значимости – 0,76. Не вдаваясь в подробный анализ, отметим, что коэффициенты регрессии нового уравнения подтверждают в основном выводы, сделанные при рассмотрении предыдущего уравнения.

## **2.4. Робастные модели**

Статистические выводы основываются на наблюдениях, но не менее важную основу для них составляет априорная информация – исходные предположения об исследуемой ситуации. Даже в самых простых случаях делаются явные или неявные допущения о случайности и независимости, о виде тех или иных распределений. Многие общепринятые постулаты в статистике (такие, как нормальность, линейность, независимость) на практике, как правило, не выполняются точно. В большинстве случаев полагают, что малое несоответствие исходным постулатам приводит к незначительным погрешностям построенной модели. Однако на протяжении последних десятилетий растет понимание того, что некоторые наиболее распространенные статистические процедуры весьма чувствительны к малым отклонениям от исходных допущений. В связи с этим поставлена задача создания робастных моделей. Термин «робастный», или устойчивый, стал весьма распространенным в последние десятилетия, хотя его начали применять еще в пятидесятые годы прошлого века. Рассмотрим две известные оценки разброса – среднее абсолютное отклонение  $d_n$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma_n$  (где  $n$  – объем выборки). По поводу относительных преимуществ оценок  $d_n$  и  $\sigma_n$  противоположных точек зрения придерживались Эддингтон и Фишер (Хьюбер Дж. П., 1984). Эддингтон считал, что, хотя это входит в противоречие с рекомендацией большинства учебников, правильнее пользоваться оценкой  $d_n$ . Фишер, напротив, настаивал на преимуществах оценки  $\sigma_n$  на основе того, что для нормально распределенных наблюдений величина  $\sigma_n$  примерно на 12 %

более эффективна, чем  $d_n$ . Предположим, что имеется набор из «хороших» и «плохих» наблюдений. Наблюдения имеют одно и то же среднее, но ошибка «плохих» наблюдений в три раза больше, чем у остальных. Исследование (Хьюбер Дж. П., 1984) показало, что двух «плохих» наблюдений на тысячу достаточно, чтобы свести на нет 12 %-ное преимущество  $\sigma_n$ , по сравнению с  $d_n$ . При 5 % наблюдений, содержащих большие ошибки, робастная оценка  $d_n$  в два раза более эффективна, чем обычно рекомендуемая средняя квадратическая ошибка  $\sigma_n$ . Засорение наблюдений большими ошибками способствует удлинению хвостов распределений, что дискредитирует дисперсию оценки  $\sigma_n$ , но в значительно меньшей степени влияет на  $d_n$ .

Приведем простой пример, показывающий неустойчивость метода наименьших квадратов к выбросам. Известно, что среднее арифметическое  $\bar{x}$  является эффективной оценкой, имеет наименьшую дисперсию, если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  распределены по нормальному закону. Пусть необходимо вычислить среднее арифметическое выборки: 1, 0, -0,5, -1, 0,5, 12. Последнее число является выбросом. Среднее арифметическое без этого числа равно нулю, а с его учетом – 2. Если в качестве среднего взять медиану, равную 0,25, результат будет более реалистичным. Медиана является робастной оценкой центра распределения. Вес наблюдения при построении медианы не зависит от его значения и равен 1. Поэтому даже большие отклонения не так резко изменяют значения медианы, как это происходит в случае среднего арифметического. Таким образом, используемые в агрометеорологических приложениях такие важные статистики, как оценки центра распределения и дисперсии, не обладают устойчивостью к выбросам, поэтому наряду с классическими оценками необходимо рассматривать их робастные аналоги, чтобы избежать ошибочных выводов.

Теперь перейдем к представлению простейших методов робастного оценивания регрессии. Допустим возможность присутствия в ряду наблюдений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  выбросов, т.е. наблюдений, удовлетворяющих исходной регрессии, но имеющих большие дисперсии, либо вообще не удовлетворяющих исходной модели. Включение таких наблюдений в ряд равноправных членов выборки  $y_1, y_2, \dots, y_n$  приведет к заметному смещению оценок параметров и ухудшению их свойств. Установлено, что даже одно, далеко лежащее от общей массы, наблюдение может испортить оценку методом наименьших квадратов. Самый простой способ получения робастных, т.е. устойчивых оценок, который обобщается на случай регрессии, заключается в отбрасывании ряда экстремальных значений выборки и оценивания коэффициентов регрессии на усеченной выборке. Доля отсеечения экстремальных значений не должна быть высокой. Если все отброшенные наблюдения оказались выбросами, то эффективность



усеченной оценки должна возрасти. Однако, если среди отброшенных наблюдений есть «хорошие», то эффективность новой оценки снизится. Получение робастных оценок методом исключения имеет один недостаток: оценки, полученные методом наименьших квадратов (МНК), резко реагирует на наличие выбросов. Это может привести к тому, что подозреваемые наблюдения окажутся на самом деле «хорошими». Для удовлетворительной «оценки выбросов» необходимо пользоваться оценкой, малочувствительной к ним, т.е. робастной, а ее как раз и требуется найти. Такие оценки можно получить, если минимизировать не сумму квадратов отклонений  $\sum \varepsilon_i^2$ , а более общую функцию:

$$L_v = \sum |\varepsilon_i|^v, \quad (2.28)$$

где  $v$  – параметр.

При  $v = 1$  минимизируется сумма абсолютных отклонений (невязок)  $\sum |\varepsilon_i|$ . При нахождении параметров регрессии, которые минимизируют сумму абсолютных отклонений, можно воспользоваться стандартными программами линейного программирования. Для нахождения минимума  $L_v$  для  $v \geq 1$  применяются общие методы оптимизации: градиентный, метод Ньютона, метод сопряженных градиентов и т.п. Приведем пример использования для данной задачи метода вариационно-взвешенных квадратических приближений из работы Е.З. Демиденко (1981) при  $v = 2$ ; 1 и 1,5. Эти регрессии выглядят следующим образом:

$$y = 0,3947x_1 + 0,2290x_2 + 3,7460x_3 - 17,083 + e; \quad v = 2;$$

$$y = 0,399x_1 + 0,171x_2 + 3,750x_3 - 12,42 + e; \quad v = 1;$$

$$y = 0,397x_1 + 0,200x_2 + 3,748x_3 - 14,80 + e; \quad v = 1,5.$$

Отметим, что для  $v = 1,5$  оценки ближе к оценкам МНК ( $v = 2$ ), чем для  $v = 1$ .

Сравнение оценок методом статистических испытаний показало, что для распределения с легкими хвостами (типа нормального) наиболее эффективной будет оценка МНК ( $v = 2$ ). Для распределений с тяжелыми хвостами оптимальная оценка достигается для значений  $v$ , близких к 1. В случае выбросов также хорошо зарекомендовала оценка, минимизирующая сумму абсолютных отклонений. Оценка  $L_v$ , соответствующая  $v = 1,5$  в случае незагрязненного нормального распределения, теряет лишь 5 % эффективности, по сравнению с оценкой МНК, зато для «загрязненных» распределений выигрыш, по сравнению с МНК, доходит до 50 % (Демиденко Е.З., 1981). Таким образом, оценка  $L_{1,5}$  является хорошим компромиссом между классической оценкой МНК и робастными оценками и может быть рекомендована для агрометеорологических задач.

Специальное исследование по этому вопросу представлено в работе (Уланова Е.С., Забелин В.Н., 1990), где показана эффективность робастной регрессии для построения прогностических зависимостей для

зерновых культур в Казахстане. Вместо квадратической функции минимизировалась функция Хьюбера:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{если } |x| < c \\ c|x| - \frac{1}{2}c^2, & \text{если } |x| \geq c \end{cases} \quad (2.29)$$

Идея использования (2.29) заключается в том, что вклад в общую сумму значений, которые по абсолютной величине меньше некоторого порогового значения  $c$  ( $c > 0$ ), предлагается измерять в квадратах отклонений, а значений, превышающих  $c$ , – пропорционально их величине.

Полученные на основании минимизации функции Хьюбера уравнения регрессии проверялись на независимой выборке. В трех из пяти регионов Казахстана средняя квадратическая ошибка уменьшилась на 10–19 %, а в двух оставшихся – на 1 и 6 %. Это исследование показало эффективность использования метода робастной регрессии для прогнозирования урожайности в случае отклонения распределения предиктанта от нормального закона и при наличии выбросов.

Разработанные в последние десятилетия методы, альтернативные классическому методу наименьших квадратов, позволяют получать хорошие практические результаты при нарушении тех или иных гипотез, на которые опирается классический подход. Возникает вопрос об использовании методов, которые были бы эффективны при нарушении нескольких гипотез одновременно, что бывает достаточно часто. Наиболее значимой комбинацией таких нарушений является сочетание мультиколлинеарности (сильной коррелированности независимых переменных – предикторов) и тяжелых хвостов у предиктанта (т.е. нарушений гипотезы о нормальности). Полезность использования в этих случаях гребневой и робастной регрессии была достаточно убедительно показана выше. Можно предположить, что совместное применение робастной и гребневой регрессии даст наибольший эффект. Примеры использования такого комбинированного подхода на основе минимизации функции Хьюбера и одновременного подбора гребневого параметра  $k$  рассмотрены В.Н. Забелиным (Уланова Е.С., Забелин В.Н., 1990). Гребнево-робастный метод чаще других оказывался лучшим по критерию средней квадратической ошибки на независимых данных. Знаки коэффициентов регрессии, полученные этим методом, становились физически более оправданными, при меньшем стабилизирующем гребневом параметре, чем при чистом методе гребневой регрессии.

### ГЛАВА 3

## БАЗОВЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПРОДУКТИВНОСТИ АГРОЭКОСИСТЕМ

Современные технологии возделывания сельскохозяйственных культур, направленные на получение максимального урожая, в своем развитии приблизились к состоянию насыщения в нескольких аспектах:

- экологическом (загрязнение природной среды и подавление механизмов ее саморегуляции);
- энергетическом (экспоненциальный рост антропогенных затрат невосполнимой энергии на каждую дополнительную единицу продукции);
- продукционном (дальнейшее увеличение доз минеральных удобрений и поливных норм приводит к угнетению культивируемых растений и микроорганизмов, снижает устойчивость агроценозов к стрессам).

Поэтому все большее значение в обеспечении устойчивого роста производства продуктов питания сельским хозяйством приобретают агрометеорологические факторы (приход солнечной радиации, условия тепло- и влагообеспеченности, засухи, заморозки и другие экстремальные явления, оптимизировать которые за счет техногенных средств невозможно или экономически нецелесообразно). Усиливаются позиции тех, кто полагает, что весь процесс интенсификации растениеводства следует направлять в конечном счете на реализацию культивируемыми растениями их главной роли – утилизации солнечной энергии и других неисчерпаемых ресурсов внешней среды с целью устойчивого роста урожая без снижения его качества, а также повышения содержания органических веществ в почве, определяющих ее плодородие.

В этом случае стратегия, направленная на повышение валовой первичной продукции, и стратегия устойчивого развития сельского хозяйства, направленная как на увеличение чистой продуктивности агроэкосистем, так и на накопление органического вещества в почве, не только не расходятся, а, напротив, совпадают. Таким образом, для агрометеорологии, как и для других научных дисциплин агрономического профиля, первостепенное фундаментальное значение имеет моделирование двух связанных между собой природных процессов:

- это фотосинтез и связанные с ним физиологические процессы зеленых растений, которые обеспечивают утилизацию лучистой энергии Солнца, поглощение углекислого газа из атмосферы и элементов минерального питания из почвы и осуществляют синтез органических веществ – основу существования всей пирамиды жизни на Земле;

– это процессы деструкции органических веществ в почве и на ее поверхности, которые замыкают биосферный цикл углерода и освобождают необходимые для растения минеральные вещества, определяя тем самым уровень плодородия почвы.

Диалектическое единство двух глобальных противоположно направленных процессов – фотосинтеза и минерализации – приводит в действие биологический круговорот не только углерода, но и других биогенных элементов (азота, фосфора и др.). Модели этих двух взаимосвязанных механизмов, обеспечивающих устойчивость агросферы, образно можно назвать моделями «зеленой» и «коричневой» машин.

### 3.1. Базовая модель продукционного процесса

Фундаментальное уравнение динамики биомассы посева сельскохозяйственных культур может быть представлено в очень простом виде:

$$\frac{dM}{dt} = \Phi(M) - R(M), \quad (3.1)$$

где  $M$  – биомасса растений на единице площади посева;  $\Phi$  – суммарный фотосинтез посева;  $R$  – суммарное дыхание биомассы растений;  $t$  – время.

Раскроем структуру функций  $\Phi(M)$  и  $R(M)$ . Предположим, что  $\alpha$  – доля фотосинтезирующих листьев от общей биомассы посева, которая не меняется со временем, и что сухой вес единицы поверхности листьев также сохраняется постоянным, что позволяет записать:

$$L = \alpha k M, \quad (3.2)$$

где  $L$  – листовой индекс ( $\text{см}^2 \cdot \text{см}^{-2}$ );  $k$  – коэффициент ( $\text{см}^2 \cdot \text{мг}^{-1}$ ).

Если состояние среды обитания растений не изменяется, то суммарный суточный фотосинтез посева можно рассматривать как функцию единственной переменной листового индекса и представить в следующем виде:

$$\Phi = \frac{\Phi_{\max} b L}{\Phi_{\max} + b L}, \quad (3.3)$$

где  $\Phi_{\max}$  – максимальный фотосинтез посева ( $\text{мг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сутки}^{-1}$ );  $b$  – параметр, характеризующий наклон кривой фотосинтеза ( $\text{мг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сутки}^{-1}$ ).

Дыхание будем полагать двухкомпонентным, состоящим из дыхания роста (пропорционального  $\frac{dM}{dt}$ ) и дыхания поддержания (пропорционально  $M$ ):

$$R = R_0 M + R_r \frac{dM}{dt}, \quad (3.4)$$

где  $R_0$  – коэффициент дыхания поддержания ( $\text{мг} \cdot \text{мг}^{-1} \cdot \text{сутки}^{-1}$ );  $R_r$  – безразмерный коэффициент дыхания роста.

Подставив (3.3), (3.4) в (3.1), получим следующее дифференциальное уравнение для динамики биомассы посева:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\Phi k \alpha b}{(1 + R_R)(k \alpha b M + \Phi_{\max})} M - \frac{R_0}{1 + R_R} M. \quad (3.5)$$

Для интегрирования (3.5) необходимо задать фитомассу агроценоза в начальный момент времени ( $t = 0$ ) :

$$M|_{t=0} = M_0. \quad (3.6)$$

Задача (3.5), (3.6) решается аналитически. Сначала найдем выражение для максимального значения искомой функции  $M(t)$ . Если положить  $\frac{dM}{dt} = 0$ , то из (3.5) следует:

$$M_{\max} = \Phi_{\max} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{B} \right), \quad (3.7)$$

где  $M_{\max}$  – максимальная фитомасса агроценоза, а  $B = k \alpha b$ .

Введем безразмерную массу  $m = \frac{M}{M_{\max}}$  и представим (3.5) в более компактной форме:

$$\frac{dM}{dt} = D \frac{m - m^2}{m + F}, \quad (3.8)$$

где  $F = \frac{R_0}{B - R_0}$ ,  $D = \frac{R_0}{1 + R_R}$ .

Проинтегрируем (3.8) с начальным условием  $m|_{t=0} = m_0$  и получим выражение для функции  $m(t)$

$$\frac{1 + R_R}{B - R_0} \left( \frac{B}{R_0} \ln \frac{1 - m}{1 - m_0} + \ln \frac{m_0}{m} \right) = t. \quad (3.9)$$

Продолжим исследование функции  $m(t)$  и на основании (3.9) найдем массу агроценоза в период максимального роста, когда  $\frac{d}{dM} \left( \frac{dm}{dt} \right) = 0$ :

$$\tilde{M} = M_{\max} \left( \sqrt{F(1 + F)} - F \right), \quad (3.10)$$

где  $\tilde{M}$  – фитомасса агроценоза в период наступления максимальных суточных приростов.

Получим также оценку максимально возможной скорости роста фитомассы:

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=\tau_{\max}} = M_{\max} D \frac{m^* (1 - m^*)}{m^* + F}. \quad (3.11)$$

Оценим время  $\tau_{\max}$ , когда скорость роста агроценоза достигает максимума:

$$\tau_{\max} = \frac{1 + R_R}{B - R_0} \left( \frac{B}{R_0} \ln \frac{1 - m_0}{1 + F - \sqrt{F(1 + F)}} + \ln \frac{\sqrt{F(1 + F)} - F}{m_0} \right). \quad (3.12)$$

Важное достоинство этой модели – небольшое число параметров, подлежащих оценке. Здесь их шесть:  $\Phi_{\max}$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $R_0$ ,  $R_R$ , численные значения параметров следующие:

$$\Phi_{\max} = 3,7 \text{ мг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сутки}^{-1}, b = 1,9 \text{ мг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сутки}^{-1}, R_R = 0,25, \\ R_0 = 0,015 \text{ сутки}^{-1}, k = 0,22 \text{ см}^2 \cdot \text{мг}^{-1}, \alpha = 0,5.$$

Заметим, что параметры  $b$ ,  $k$  и  $\alpha$  используются не порознь, а в виде произведения  $B$ . Следовательно, их можно рассматривать как один обобщенный параметр  $B$  – коэффициент эффективности пространственной организации фитомассы посева. Для базисных значений параметров  $B = 1,9 \cdot 0,22 \cdot 0,5 = 0,209 \text{ сутки}^{-1}$ .

Таким образом, динамика роста посева определяется значениями четырех ключевых параметров:  $\Phi_{\max}$ ,  $B$ ,  $R_0$ ,  $R_R$ , а наиболее важными показателями, характеризующими ее динамику, являются  $M_{\max}$ ,  $M^*$ ,  $\left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=\tau_{\max}}$  и  $\tau_{\max}$ .

$M_{\max}$  пропорциональна  $\Phi_{\max}$ , что вполне естественно, поскольку  $\Phi_{\max}$  характеризует доступные энергетические ресурсы среды. Однако условие существования агроценоза определяет не только  $\Phi_{\max}$ . Для того, чтобы  $M_{\max}$  было больше нуля, необходимо, чтобы  $B > R_0$ . Следовательно,  $B = R_0$  – нижняя граница диапазона возможных изменений  $B$ . Задав  $R_0$ , можно определить минимально возможные значения  $k$  и  $\alpha$ . Например, при дыхании поддержания, равном 1,5 % в сутки ( $k = 0,22 \text{ см}^2 \cdot \text{мг}^{-1}$ ), минимальная для существования агроценоза доля надземной фитомассы должна превышать 3,6 %:

$$\alpha_{\min} = \frac{0,015}{1 \cdot 9 \cdot 22} = 0,036.$$

Величина  $M_{\max}$  является асимптотой функции  $M(t)$  ( $M \rightarrow M_{\max}$  при  $t \rightarrow \infty$ ) и в силу этого не зависит от  $R_R$  – коэффициента дыхания роста, поскольку увеличение потерь при трансформации продуктов фотосинтеза в структурную фитомассу может быть компенсировано большей длительностью процесса. С практической точки зрения важен не столько теоретически возможный максимум при неограниченной продолжительности вегетации, сколько уровень фитомассы, достигаемый к конкретному моменту времени. Одним из таких показателей является  $M^*$  – уровень фитомассы агроценоза, когда достигаются максимальные суточные приросты. Величина  $M^*$  пропорциональна  $\Phi_{\max}$ , нелинейно связана с  $R_0$  и  $B$  и не зависит от  $R_R$  и  $M_0$ .

Динамику суточных приростов характеризуют координаты точки максимума  $M_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ . Время наступления максимальных суточных приростов  $\tau_{\max}$  – важнейшая динамическая характеристика агроценоза, которая

определяет эффективность использования климатических ресурсов, особенно в тех районах, где вегетационный период непродолжителен.

В табл. 3.1 приведены рассчитанные величины  $M_{\max}$ ,  $M^*$ ,  $\frac{dM}{dt} \Big|_{t=\tau_{\max}}$  и  $\tau_{\max}$  для 10 различных сочетаний определяющих параметров. Для всех вариантов начальное значение фитомассы принято равным 1 % от  $M_{\max}$ , т.е.  $m_0 = 0,01$ . Результаты первого «базисного» варианта расчетов помещены в первой графе табл. 3.1. Первый, второй и третий варианты отличаются лишь значением параметра  $\alpha$ , входящего в состав  $B$ -коэффициента фотосинтетической эффективности пространственной организации фитомассы. Для первого варианта  $\alpha$  (доля фотосинтезирующей фитомассы) составляет 50 %, для второго – 90 % и для третьего – 10 %. Увеличение доли фотосинтезирующей фитомассы от 50 до 90 % повысило конечную фитомассу ценоза на  $0,8 \text{ т} \cdot \text{га}^{-1}$ , но существенно уменьшило время, необходимое для достижения максимальных суточных приростов (25 дней вместо 40 для первого варианта). Снижение доли фотосинтезирующих органов от 50 до 10 % приводит к резкому замедлению темпов роста посева. Максимальные приросты достигаются при этом лишь на 227-й день – за пределами вегетационного периода в средних широтах.

Первый, четвертый, пятый и шестой варианты отличаются коэффициентом дыхания поддержания (1,5, 0,5, 3 и 6 % в сутки соответственно). От 0,5 до 6 % – обычный диапазон изменения этого коэффициента, наблюдаемый в экспериментах на различных культурах. В опытах для ячменя получено, что  $R_0 = 0,005$  при  $15^\circ\text{C}$ , но встречаются и более низкие значения  $R_0$  для корней этой культуры. Величины  $R_0$  порядка 0,07 наблюдались для кукурузы при  $18^\circ\text{C}$  и для сорго. Что касается верхних границ диапазона, то значения  $R_0$  порядка 0,045 приводятся для подсолнечника (при  $25^\circ\text{C}$ ) и кукурузы (при  $33^\circ\text{C}$ ). Иногда в литературе сообщаются и гораздо большие величины.

Таблица 3.1

**Основные характеристики временной динамики фитомассы агроценоза при различных значениях основных определяющих параметров  $\Phi_{\max}$ ,  $R_0$  и  $B$**

Параметр	Размерность	Вариант динамики фитомассы									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Phi_{\max}$	$\text{т} \cdot \text{га} \cdot \text{сут}^{-1}$	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37	0,44	0,44	0,44	0,44
$R_0$	$\text{сутки}^{-1}$	0,015	0,015	0,015	0,005	0,030	0,060	0,015	0,030	0,060	0,015
$B$	$\text{сутки}^{-1}$	0,209	0,376	0,042	0,209	0,209	0,209	0,209	0,209	0,209	0,376
$M_{\max}$	$\text{т} \cdot \text{га}^{-1}$	22,9	23,7	15,9	72,2	10,6	4,4	27,0	12,5	5,2	27,9
$M^*$	$\text{т} \cdot \text{га}^{-1}$	4,8	4,0	5,9	9,7	2,9	1,5	5,7	3,4	1,8	4,6
$\frac{dM}{dt} \Big _{t=\tau_{\max}}$	$\text{т} \cdot \text{га} \cdot \text{сут}^{-1}$	0,16	0,19	0,05	0,21	0,11	0,05	0,19	0,13	0,08	0,22
$\tau_{\max}$	сутки	40	25	227	50	38	42	40	38	42	25

С падением затрат на дыхание  $M_{\max}$ ,  $M^*$ ,  $M_{\max}^*$  монотонно растут. Зависимость между  $R_0$  и  $\tau_{\max}$  носит более сложный характер. С ростом  $R_0$   $\tau_{\max}$  сначала убывает с 50 дней при  $R_0 = 0,005$  до 38 дней при  $R_0 = 0,030$ , а затем снова растет, достигая 42 дней при  $R_0 = 0,060$ .

Динамика сезонного хода суточных приростов более или менее точно описывается двумя сторонами треугольника с основанием в  $t$  дней и с высотой, соответствующей максимальным суточным приростам  $C_{\max}$ , которые у зерновых культур продолжаются 5–10 дней в период цветения. При одинаковых длинах периода вегетации размеры  $C_{\max}$  решающим образом определяют размеры биологического урожая. Повышение урожая достигается увеличением  $C_{\max}$ , увеличением времени работы биоценоза на уровне  $C_{\max}$  и/или увеличением периода вегетации.

Максимальные суточные приросты в рассматриваемой серии численных экспериментов не превысили  $0,22 \text{ т} \cdot \text{га}^{-1}$ . В подавляющем числе случаев значения  $C_{\max}$  достигают  $150\text{--}200\text{--}300 \text{ кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{сутки}^{-1}$ . В то же время известно, что в наилучших условиях и для наиболее продуктивных растений (кукуруза, сахарная свекла) величина  $C_{\max}$  составляет  $400\text{--}500$  и даже  $600 \text{ кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{сутки}^{-1}$ . Это свидетельствует не только о многих ограничениях, в рамках которых формируется урожай в реальных условиях, но и о больших возможностях для преодоления этих ограничений.

Таким образом, даже с помощью очень простых моделей можно добиться удовлетворительного качественного, а отчасти и количественного воспроизведения основных черт динамики формирования урожая.

### 3.2. Базовая модель деструкционного процесса

Процессы разложения почвенной органики замыкают биологический круговорот не только углерода, но и всех других биогенных элементов. Система почва–растительный покров относится к сложным саморегулирующим системам с обратными связями. В природных экосистемах с хорошо дренированными почвами имеет место положительная обратная связь между содержанием гумуса и продуктивностью растений. С ростом продуктивности агроценоза увеличивается количество поступающих в почву растительных остатков, служащих источником образования гумуса. Однако накопление гумуса в почвах имеет предел. Аналитически эту зависимость можно представить с помощью выражения Михаэлиса–Ментен  $P = P_0 \frac{x_1}{\alpha + x_1}$ , где  $P_0$  – предельная продуктивность растительного покрова;  $\alpha$  – параметр;  $x_1$  – запас углерода в почве.

Модель, реализующая эту обратную связь, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (Рыжова И.М., 1991):



$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_{21}x_2 - k_1x_1 + C \\ \frac{dx_2}{dt} = k_0 \frac{P_0 x_1}{\alpha + x_1} - (k_2 + k_{21})x_2 \end{cases}, \quad (3.13)$$

где  $x_1$  – запас углерода гумуса в почве;  $x_2$  – запас углерода в мертвой фитомассе;  $P_0$  – потенциальная продуктивность фитоценоза (параметр, характеризующий биоклиматический потенциал территории);  $\alpha$  – параметр, зависящий от свойств почвообразующей породы, численно равный запасу углерода, при котором продуктивность равна  $\frac{P_0}{2}$ ;  $k_0$  – доля чистой первичной продуктивности, ежегодно включающаяся в деструкционный цикл;  $k_1$  – константа скорости минерализации гумуса;  $k_2$  – константа скорости минерализации растительных остатков;  $k_{21}$  – константа скорости гумификации растительных остатков;  $C$  – сумма скоростей абиотического вноса/выноса органического углерода.

Система (3.13) сводится к одному уравнению второго порядка относительно  $x_1$ :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k k_{21} x_1}{\alpha + x_1} - (k_1 + k_3) \frac{dx_1}{dt} - k_3 k_1 x_1 + k_3 c, \quad (3.14)$$

где  $k = k_0 P_0$ ;  $k_3 = k_2 + k_{21}$  – константа скорости разложения растительных остатков.

Поведение (3.14) зависит от эффективного параметра  $q$ , который однозначно определяется механизмом накопления гумуса и имеет вид:

$$q = \frac{k k_{21}}{\alpha} - k_1 k_3. \quad (3.15)$$

В случае закрытой системы (т.е. при  $C = 0$ ) возможны два стационарных состояния: первое – тривиальное –  $x_1 = 0$ , второе –  $x_1 = \frac{k k_{21}}{k_1 k_3} - \alpha$ .

Переход из одного состояния в другое определяется параметром  $q$ . Неустойчивое состояние системы при  $q = 0$  – это точка бифуркации (лат. bifurcate – раздвоение, разветвление чего-либо).

В открытых системах, для которых существенны абиотические потоки органического углерода ( $C \neq 0$ ), при  $C > 0$  стационарное положительное решение существует как для положительных так и для отрицательных значений  $q$ , а в случае  $C < 0$  гумусонакопление возможно только при положительных значениях  $q$ .

При этом стационарный запас органического углерода в почве  $x_1$  определяется следующим выражением:

$$x_1 = \left\{ k k_{21} + k_3 c - \alpha k_1 k_3 + \left[ (k k_{21} + k_3 c - \alpha k_1 k_3)^2 + 4 \alpha k_1 k_3^2 c \right]^{1/2} \right\} / 2 k_1 k_3. \quad (3.16)$$

Область устойчивости этого стационарного состояния задается неравенствами для  $C_n$ ,  $\alpha$ ,  $k_1$ ,  $k_{11}$ ,  $k_{21}$ , например:

$$C_0 \leq \frac{(\sqrt{kk_{21}} - \sqrt{\alpha k_1 k_3})^2}{k_3}. \quad (3.17)$$

Это неравенство представляет не только теоретический, но и практический интерес. Формула (3.17) позволяет установить критические значения скорости эрозионных потерь гумуса.

Формула (3.16) применялась для оценки стационарных запасов гумуса в почвах зональных природных экосистем европейской территории России (Рыжова И.М., 1991), как, например:

	Стационарный запас гумуса, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{год}^{-1}$	Чистая первичная продуктивность, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$
Средняя тайга	6,7	0,6
Широколиственные леса	28,2	1,2
Луговая степь	67,5	2,0

Модель (3.13) – пример того, как с помощью простой математической конструкции удается описать основные черты поведения сложной природной системы. Однако применимость этой модели для исследования агроэкосистем ограничивается тем, что она не учитывает в явной форме важнейший в земледелии управляющий фактор – минеральные удобрения (органические удобрения могут быть учтены в составе  $C$ ). Чтобы устранить этот недостаток, необходимо зависимость между продуктивностью фитоценоза и содержанием гумуса в системе (3.13) заменить аналогичной функцией от содержания доступных форм минерального азота в почве  $x_3$ , что представляется более обоснованным. Тогда вместо (3.13) можно, согласно (Сиротенко О.Д. и др., 2003), записать:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_{21}x_2 - k_1x_1 - k_c x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = k_0 \frac{P_0 x_3}{\alpha_N + x_3} - (k_2 + k_{21}) x_2 + F \end{cases}, \quad (3.18)$$

где  $x_3$  – эффективное содержание доступных форм минерального азота в почве;  $F$  – поток углерода, поступающий в почву с органическими удобрениями;  $k_c$  – константа скорости потерь гумуса в результате эрозии почвы;  $\alpha_N$  – параметр, численно равный содержанию азота в почве, при котором продуктивность агроценоза равна  $\frac{P_0}{2}$ .

Для определения  $x_3$  система (3.18) дополняется уравнением баланса доступных для растений минеральных форм азота в почве:

$$\frac{dx_3}{dt} = f + V + \gamma_1 k_1 x_1 + \gamma_2 k_2 x_2 - \gamma_3 \frac{P_0 x_3 (1 - k_0)}{\alpha + x_3} - k_{N3}, \quad (3.19)$$

где  $f$  – азот, вносимый с минеральными удобрениями;  $V$  – поступления минеральных форм азота за счет азотофиксация микроорганизмами и с атмосферными осадками;  $k_{N3}$  – коэффициент потерь за счет денитрификации и вымывания;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – доля азота в продуктах минерализации гумуса и свежего органического вещества соответственно;  $\gamma_3$  – доля азота в биомассе растений.

Остальные обозначения прежние. Представляется также, что  $k_1$  и  $k_2$  зависят от  $x_3$  и эти зависимости имеют вид:

$$k_1 = k_1^0 \left( \frac{x_3}{N_0} \right)^s \text{ и } k_2 = k_2^0 \left( \frac{x_3}{N_0} \right)^p, \quad k_{21} = k_{21}^0 \left( \frac{x}{P_0} \right)^l,$$

где  $k_1^0$  и  $k_2^0$  – скорости минерализации гумуса при  $x_3 = N_0$  и свежего органического вещества соответственно;  $k_{21}^0$  – скорость гумификации;  $S, P, l$  – константы.

Системы (3.18) и (3.19) относятся к классу «жестких» систем дифференциальных уравнений, поскольку постоянные скорости в этих уравнениях существенно отличаются друг от друга (процессы трансформации органических веществ в почве значительно более «медленные», по сравнению с аналогичными процессами для минерального азота).

Трудности, связанные с особенностями систем (3.18) и (3.19), преодолеваются следующим образом. Система (3.18) интегрируется численно с шагом в один год, а уравнение (3.19) в результате упрощений преобразуется в трансцендентное балансовое соотношение, положительный корень которого есть эффективное содержание азота.

Модель (3.18), (3.19) более реалистична для решения агрономических задач, поскольку в явном виде учитывает минеральное питание растений. Однако исследование этой существенно нелинейной модели представляется значительно более трудной задачей.

# ГЛАВА 4

## ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ПРОДУКТИВНОСТИ АГРОЭКОСИСТЕМ

### 4.1. Физико-статистические модели

Математические модели формирования урожая делятся на три вида: статистические, физико-статистические и динамические.

Статистические модели «погода–урожай» рассмотрены в первых двух главах. Физико-статистические схемы отличаются от статистических учетом значительно большего объема информации о характере влияния метеорологических и агротехнических факторов на продукционный процесс растений. Детальностью и тщательностью разработки отличаются физико-статистические модели «погода–урожай» В.П. Дмитренко (Дмитренко В.П, 2010), которые широко применяются в Украине для агрометеорологического обеспечения сельского хозяйства. Для оценки ресурсов урожайности озимой пшеницы используется следующая модель:

$$Y = Y_{\max} (1 - a)f(k)S(T, W, P)_{III-VII} \varphi(\lambda) + \Delta, \quad (4.1)$$

где  $Y$  – урожайность озимой пшеницы (т/га);  $Y_{\max}$  – ежегодный статистический максимум урожайности (т/га);  $a$  – изреженность;  $f(k)$  – функция кустистости;  $S(T, W, P)_{III-VII}$  – показатель продуктивности гидрометеорологических условий в период март–июль;  $T$  – температура воздуха ( $^{\circ}\text{C}$ );  $W$  – запасы влаги в почве на весну (мм);  $P$  – осадки в весенне-летний период (мм);  $\varphi(\lambda)$  – показатель уровня урожайности при различном соотношении площадей уборки и посева;  $\Delta$  – ошибка расчета за счет неучтенных факторов (т/га).

Из гидрометеорологических факторов в модели учитываются температура воздуха, осадки в весенне-летний период и запасы влаги в почве на весну. Расчет показателя продуктивности осуществляется по формуле:

$$S(T, W, P)_{III-V} = \eta_{\text{вс}}(W) \alpha_{\text{вс}} + \sum_{i=1}^n \eta_i(T) \eta_i(P) \alpha_i,$$

где  $\eta_{\text{вс}}(W)$  – коэффициент продуктивности весенних запасов влаги в почве;  $\eta_i(T)$  – коэффициент продуктивности температуры воздуха;  $\eta_i(P)$  – коэффициент продуктивности осадков;  $\alpha_i$  – весовые множители, отражающие вклад в формирование урожайности гидрометеорологических условий  $i$ -го ( $i = 1, n$ ) периода вегетации культуры.

Коэффициент продуктивности весенних запасов влаги рассчитывается по формуле:

$$\eta_{\text{вс}}(W) = 1 - \left( \frac{W - W_0}{W_0} \right)^2,$$

где  $W$  – фактические запасы продуктивной влаги в почве;  $W_0$  – оптимальные запасы влаги в почве на весну.

Коэффициенты продуктивности температуры воздуха и осадков рассчитываются, соответственно, по формуле

$$\eta(T) = \frac{m(T)}{M(T_0)} = e^{-a\left(\frac{T-T_0}{10}\right)^2},$$

где  $m(T)$  – реальный прирост продукции при температуре ( $T$ );  $m(T_0)$  – максимально возможный прирост при оптимальной температуре ( $T_0$ ) в конкретный период вегетации;  $a$  – некоторый численный параметр, и формуле

$$\eta(P) = \frac{m(P)}{M(P_0)} = \left(1 + \frac{P - P_0}{P_0 - P_{\min}}\right)^{a_1} \left(1 - \frac{P - P_0}{P_{\max} - P_0}\right)^{a_2},$$

где  $m(P)$  – реальный прирост продукции, наблюдаемый при выпадении осадков ( $P$ );  $M(P_0)$  – максимально возможный прирост при оптимальной сумме осадков ( $P_0$ ) в конкретный период вегетации;  $P_{\min}$ ,  $P_{\max}$  – соответственно, биологический минимум и максимум осадков;  $a_1$ ,  $a_2$  – параметры.

Произведение  $\eta(T)$  и  $\eta(P)$  позволяет получить коэффициент  $\eta(T, P)$ , который интерпретируется как показатель совместного влияния температуры воздуха и осадков на формирование урожайности.

Рассмотренная модель достаточно универсальна и была положена в основу построения схем расчета урожайности озимой пшеницы, ярового ячменя, кукурузы, озимой ржи, картофеля, сахарной свеклы и подсолнечника.

За рубежом наибольшей известностью среди физико-статистических моделей пользуется модель В. Байера (Baier W., 1973). Основное уравнение предложенной им модели имеет вид:

$$Y = \sum_{t=0}^m V_1 V_2 V_3, \quad (4.2)$$

где  $Y$  – зависимая переменная, представляющая собой конечный урожай или урожай хозяйственно-ценных частей растения на определенную фазу развития;  $t$  – биометеорологическое время, изменяющееся от  $t=0$  до  $t=m$  (на дату всходов  $t=1$ , кущения  $t=2$  и т.д.);  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , – функции от выбранных метеорологических переменных. Каждая функция представляется в следующей форме:

$$V = (u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + u_4 t^4) + (u_5 t + u_6 t^2 + u_7 t^3 + u_8 t^4)x + (u_9 t + u_{10} t^2 + u_{11} t^3 + u_{12} t^4)x^2, \quad (4.3)$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_{12}$  – коэффициенты, которые для каждой функции оцениваются с помощью численных методов оптимизации;  $x$  представляет в  $V_1, V_2, V_3$  одну из следующих характеристик погодных условий за сутки: минимальную, максимальную температуру воздуха, относительную влажность почвы, отношение фактического и потенциального испарений,

суммарную радиацию. Самой информативной комбинацией трех факторов из пяти перечисленных оказалось сочетание: солнечная радиация, минимальная температура воздуха и отношение фактического испарения к потенциальному. Параметры модели оценены на материалах об урожайности яровой пшеницы в Канаде.

Модель В. Байера для яровой пшеницы объясняет около 80 % дисперсии урожая. Эта модель – хороший пример того, как сравнительно простыми средствами можно построить гораздо более совершенный, по сравнению с классической регрессией, аппарат для исследования системы «погода–урожай». Действительно, рассматриваемая модель содержит 12 параметров по каждой переменной и позволяет давать комплексную количественную оценку условий формирования урожая за каждый день. Регрессионная модель, учитывающая тот же объем информации, даже при линейной форме должна содержать несколько сотен параметров, подлежащих оценке, что нереально. Высокая степень сжатия исходной информации достигается здесь благодаря привлечению априорной информации об изучаемой системе.

Сказанное не означает, что рассмотренная схема не может быть улучшена. Характер реакции растения на текущие условия среды определяется его предысторией – условиями роста от прорастания семян до текущего момента. Растение интегрирует воздействия прошедшего периода вегетации, создавая ту или иную площадь ассимиляционного аппарата, развивая различную по мощности корневую систему. Прошлые условия формируют агроценоз и тем самым определяют в какой-то мере характер его реакций на текущие и будущие условия среды. Схема В. Байера не учитывает этой особенности моделируемой системы, что достигается в рамках динамических моделей к рассмотрению которых мы переходим.

#### **4.2. Динамические модели**

Главной идеей, которую динамические модели привнесли в агрометеорологию, является осознание факта, что процесс формирования урожая осуществляется во времени. Физические факторы, лимитирующие этот процесс, также изменяются во времени, взаимодействуют между собой и сменяют друг друга. Адекватным математическим аппаратом для описания процесса формирования урожая представляется система дифференциальных уравнений, включающая:

- уравнения роста растений;
- уравнения энергомассообмена среды обитания растений.

Мировой опыт показывает, что имитационные динамические модели незаменимы при решении следующих задач:

- оценок текущего состояния посева;
- прогнозирования будущего хода вегетации;

– принятия оперативных решений по управлению производственным процессом.

Вопросам разработки и использования динамических моделей посвящено ряд монографий (Сиротенко О.Д., 1981; Галямин Е.П., 1981; Томинг Х.Г., 1984; Франс Дж., Торнли Дж., 1987; Полуэктов Р.А., 1991 и др.). В зависимости от детализации моделируемых процессов динамические модели существенно различаются по степени сложности. В настоящее время в России в этом плане лидирует динамическая модель производственного процесса сельскохозяйственных культур – имитационная система AGROTOOL, разработанная Р.А. Полуэктовым и его учениками (Полуэктов Р.А. и др., 2006).

Здесь в качестве примера представим сравнительно простую динамическую модель формирования урожая пшеницы в условиях засушливого климата, которую можно назвать адаптационной.

Основу модели составляет система уравнений, позволяющая рассчитывать динамику биомассы посева от всходов растений до созревания урожая. Посев рассматривается как функционально дифференцированная система, в которой выделены три структурные единицы: стебли ( $S$ ), корни ( $r$ ) и репродуктивные органы ( $z$ ). Принято, что суточный прирост сухой массы стеблей, корней и репродуктивных органов равен разности между поступлением продуктов фотосинтеза в данный орган и затратами, которые складываются из расходов на дыхание и отток пластических веществ в репродуктивные органы как «склад готовой продукции». Для описания дыхания ( $R$ ) используется двухкомпонентная схема:

$$R = R_0 \Phi_T m + R_R \frac{dm}{dt},$$

где  $R_0$  и  $R_R$  – коэффициенты дыхания поддержания  $R_0$  и дыхания роста  $R_R$ ,  $m$  – биомасса,  $\Phi_T$  – температурный коэффициент.

В соответствии с теорией производственного процесса уравнение роста можно представить в виде следующей системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} M_S^j = M_S^{j-1} + K_R (\alpha_S^j \Phi^j - R_0^j M_S^{j-1} - q_{SZ} M_S^{j-1}), \\ M_r^j = M_r^{j-1} + K_R (\alpha_r^j \Phi^j - R_0^j M_r^{j-1} - q_{rZ} M_r^{j-1}), \\ M_z^j = M_z^{j-1} + K_R (\alpha_z^j \Phi^j - R_0^j M_z^{j-1} + q_{SZ} M_S^{j-1} + q_{rZ} M_r^{j-1}), \end{cases} \quad (4.4)$$

где  $K_R = \Delta t / (1 + R_R)$ ,  $\alpha_S^j$ ,  $\alpha_r^j$  и  $\alpha_z^j$  – ростовые функции ( $\alpha_S^j + \alpha_r^j + \alpha_z^j = 1$ );  $\Phi^j$  – суммарный фотосинтез посева за сутки;  $R_0$  и  $R_R$  – коэффициенты дыхания;  $q_{SZ}$  и  $q_{rZ}$  – коэффициенты, определяющие потоки пластических веществ из вегетативных органов в репродуктивные;  $\Delta t$  – шаг по времени. Суммарный фотосинтез посева в (4.4) рассчитывается по формуле:

$$\Phi^j = F A I^j \left( \frac{1}{\Phi_{\max} f_T^j} + \frac{1}{\alpha_f Q_L^j} + \frac{r_H^j + r_{\Sigma}^j}{C_A + K_C} \right)^{-1}, \quad (4.5)$$

где  $\Phi_{\max}$  – максимально возможный суммарный фотосинтез;  $FAI^j$  – фотосинтезирующая площадь фитомассы;  $Q_L^j$  – суммарная средняя радиация в посеве;  $C_A$  – концентрация  $CO_2$  в атмосфере;  $f_T^j$  – температурный коэффициент фотосинтеза;  $r_H^j$  – суммарное устьичное сопротивление агроценоза,  $\alpha_f$ ,  $r_s$ ;  $K_C$  – константы.

Для расчета  $FAI^j$  используется следующая зависимость:

$$FAI^j = \frac{L_{\max} b_L L^j}{L_{\max} + b_L L^j}, \quad (4.6)$$

где  $L^j$  – листовой индекс;  $L_{\max}$  и  $b_L$  – коэффициенты.

Приходящая на верхнюю границу посева суммарная радиация определяется по формуле Сивкова:

$$Q_H^j = 12,66(S^j)^{1,31} + 315(\sin h^j)^{2,1}, \quad (4.7)$$

где  $S^j$  – число часов солнечного сияния;  $h^j$  – полуденная высота Солнца, которая определяется по известным астрономическим формулам.

Средняя интенсивность поглощенной в посеве солнечной радиации  $Q_L^j$  зависит от  $FAI^j$ :

$$Q_L^j = Q_H^j / (1 + 0,33FAI^j).$$

Для расчета динамики запасов продуктивной влаги пахотного и метрового слоев почвы 10-слойная численная схема расчета влажности почвы (Сиротенко О.Д., 1981) параметризована в виде следующих уравнений регрессии:

$$W_1^j = W_1^{j-1} + \Delta t(0,067d^j + 0,758P^j - 0,0035S^j d^j - 0,0086d^j W_1^{j-1} - 0,216), \quad (4.8)$$

$$W_2^j = W_2^{j-1} + \Delta t(0,048d^j + 0,7758P^j - 0,0032S^j d^j - 0,0027d^j W_2^{j-1} - 0,2944), \quad (4.9)$$

где  $W_1$ ,  $W_2$  – влагозапасы пахотного и метрового слоев почвы соответственно;  $d^j$  – дефицит влажности воздуха;  $P^j$  – сумма осадков;  $S^j$  – число часов солнечного сияния;  $\Delta t$  – шаг по времени, равный суткам.

На основании  $W_1$ ,  $W_2$  с учетом динамики вертикального распределения корней определяется эффективная влажность корнеобитаемого слоя  $W_f^j$ :

$$W_f^j = \mu_r^j W_1^j + (W_2^j - W_1^j) \cdot (1 - \mu_r^j). \quad (4.10)$$

Коэффициент  $\mu_r^j$ , определяющий долю корней в пахотном слое почвы, связан с массой корневой системы следующим соотношением:

$$\mu_r^j = 1 - \exp \left[ -q_r \frac{20\rho_r}{M_r^j} \right],$$

где  $M_r^j$  – текущая масса корневой системы;  $q_r$  и  $\rho_r$  – константы.

На рис. 4.1 представлена рассчитанная по (4.8) и (4.9) динамика запасов продуктивной влаги  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_f^j$  в контрастные по урожайности годы



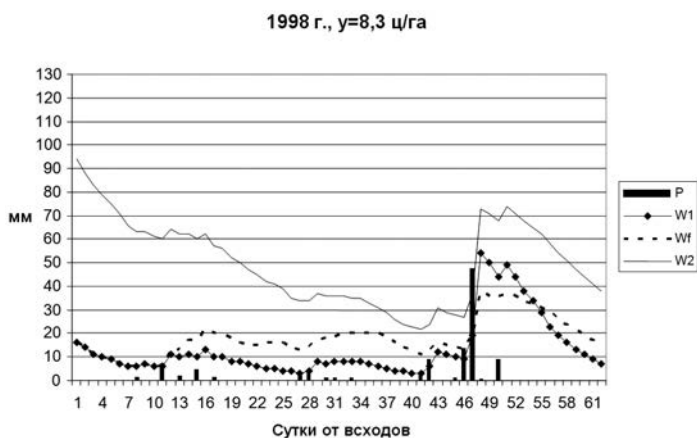
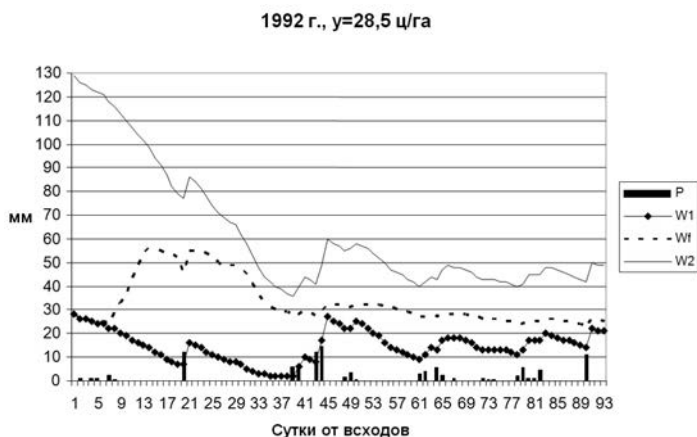


Рис. 4.1. Динамика запасов продуктивной влаги в пахотном W1 и метровом W2 слоях почвы, Wf – эффективные запасы почвенной влаги, рассчитанные с учетом распределения корней, P – сумма осадков (посевы яровой пшеницы, НЦП им. А.И. Бараева, Казахстан)

(1992 и 1998), когда были получены, соответственно, самый высокий и самый низкий урожаи яровой пшеницы за период с 1986 по 2009 год.

Эффективная влажность корнеобитаемого слоя почвы  $W_f^j$  определяет устьичное сопротивление, которое в свою очередь контролирует скорость фотосинтеза посева. Связь между состоянием увлажнения почвы и текущим суммарным фотосинтезом определяется величиной устьичного сопротивления  $r_{st}$ :

$$r_{st} = \frac{r_{\min} \Psi_{\max} + C_S \Psi_S^j}{\Psi_{\max} - \Psi_S^j} \cdot \frac{Q_L^j + q_S}{Q_L^j}, \quad \Psi_S^j = \Psi_{\max} \exp\left(-7,76 \frac{W_f^j}{W_{PB}}\right). \quad (4.11)$$

Здесь  $\Psi_S^j$  – водный потенциал почвы;  $W_{PB}$  – полевая влагоемкость почвы;  $r_{\min}$  – минимальное устьичное сопротивление;  $\Psi_{\max}$  – максимальный водный потенциал;  $C_S$  и  $q_S$  – константы устьичной регуляции.

Осталось задать ростовые функции  $\alpha_S^j$ ,  $\alpha_r^j$  и  $\alpha_Z^j$ , которые определяют долю продуктов фотосинтеза, направляемых в стебли, корни или репродуктивные органы растений. Аппарат ростовых функций – самый ранний, самый простой и самый употребительный метод математического описания распределения первичных ассимилятов (продуктов фотосинтеза) между органами растений. Из общих соображений следует, что для листьев и корней значение ростовой функции должно уменьшаться по мере старения растения, а для генеративных органов, например колоса, наоборот, ростовая функция тождественно равна нулю до момента колошения и затем резко возрастает при его переходе в генеративную стадию развития. В моделях первого поколения ростовые функции задавались как однозначные аналитические функции биологического времени, измеряемого суммами эффективных температур воздуха. Ясно, что жестко заданное распределение ассимилятов не позволяет учесть адаптационные механизмы растения и отразить влияние внешних условий на процессы органогенеза растений. К настоящему времени предложено множество адаптационных моделей, в рамках которых ростовые функции определяются в результате решения той или иной задачи оптимального управления (Полуэктов Р.А. и др., 2006; Топаж А.Г., 2009). Рассматриваемая модель в полной мере относится к адаптационным моделям.

Учитывая, что в условиях аридного климата адаптация к условиям увлажнения является ведущим фактором, определяющим соотношение подземной и надземной массы растений, предлагается следующая ростовая функция для корневой системы:

$$\alpha_r^j = \alpha_{r\max} \left( 1 - \left( \frac{V^j}{V_F} \right)^{\alpha_r} \right) \cdot \left( 1 - \left( \frac{W_f^j}{W_{\max}} \right)^{\alpha_W} \right), \text{ если } W_f^j > W_{\max}, \text{ то } W_f^j = W_{\max}, \quad (4.12)$$

где  $\alpha_{r\max}$  – максимальное значение  $\alpha_r^j$ ;  $V^j$ ,  $V_F$  – суммы эффективных температур воздуха на  $j$ -е сутки и на конец вегетации соответственно;  $W_{\max}$  – максимально возможные эффективные влагозапасы почвы;  $\alpha_r$  и  $\alpha_W$  – константы. При постоянных влагозапасах  $\alpha_r^j$  является монотонно убывающей функцией времени.

Ростовая функция репродуктивных органов (колосьев для пшеницы) определяется следующей функцией от биологического времени  $V^j$ :

$$\hat{\alpha}_Z^j = \alpha_{Z\max} \left[ 1 - \left( \frac{V_F - V^j}{V_F - V_R} \right)^{C_R} \right], \text{ если } V^j > V_R, \text{ иначе } \hat{\alpha}_Z^j = 0, \quad (4.13)$$

которая с учетом условий увлажнения имеет вид:

$$\alpha_Z^j = \hat{\alpha}_Z^j + (1 - \hat{\alpha}_Z^j) \left[ 1 - \left( \frac{W_f^j}{W_{\max}} \right)^{b_W} \right], \quad (4.14)$$

где  $b_W$  – коэффициент.

Ростовая функция побегов определяется из условия баланса при распределении продуктов фотосинтеза между  $M_Z^j$ ,  $M_r^j$  и  $M_s^j$ :

$$\alpha_s^j = 1 - \alpha_r^j - \alpha_Z^j.$$

Как следует из рис. 4.2, ростовые функции посева для урожайного и неурожайного годов существенно отличаются друг от друга. Так, в 1992 г. рост надземной биомассы прекратился на 57 сутки от всходов, тогда как в засушливом 1998 г. рост побегов завершился на декаду ранее. В 1992 г. репродуктивное развитие растений началось на 37 сутки от всходов, тогда как в 1998 г. этот процесс начался ранее – на 30 сутки.

Представим температурные функции фотосинтеза и дыхания:

$$f_T^j = \exp \left( \alpha \left( \frac{T - T_{opt}^j}{10} \right)^2 \right), \quad \alpha = \begin{cases} -1, & \text{если } T^j < T_{opt}^j \\ -2, & \text{если } T^j \geq T_{opt}^j \end{cases}; \quad (4.15)$$

$$R^j = R_0 2^{0.1(T^j - T_R)}. \quad (4.16)$$

Здесь  $T_{opt}^j$  – оптимальная температура для фотосинтеза, которая рассматривается как функция времени (°C);  $T_R$  – базисная температура дыхания (°C).

Итак, определены все необходимые аналитические зависимости для решения системы разностных уравнений (4.4). Для расчетов необходимо задать начальные (на дату сева) значения биомассы  $M_s^{j=1}$ ,  $M_r^{j=1}$  и  $M_z^{j=1}$ . Решения (4.4) для двух вегетационных периодов яровой пшеницы показаны на рис. 4.3.

Для идентификации параметров модели использованы данные полевых опытов по яровой пшенице НПЦ зернового центра Казахстана им. А.И. Бараева за период с 1986 по 2009 год. Калибровка параметров динамических моделей сводится к минимизации целевых функций в виде средних квадратических ошибок (СКО):

$$\text{СКО} = \frac{1}{n} \sum_i (y_\phi - \hat{y})^2, \quad (4.17)$$

где  $y_\phi$  и  $\hat{y}$  – соответственно, фактические и вычисленные значения урожайности или биомассы (по отдельным органам растений на ту или иную

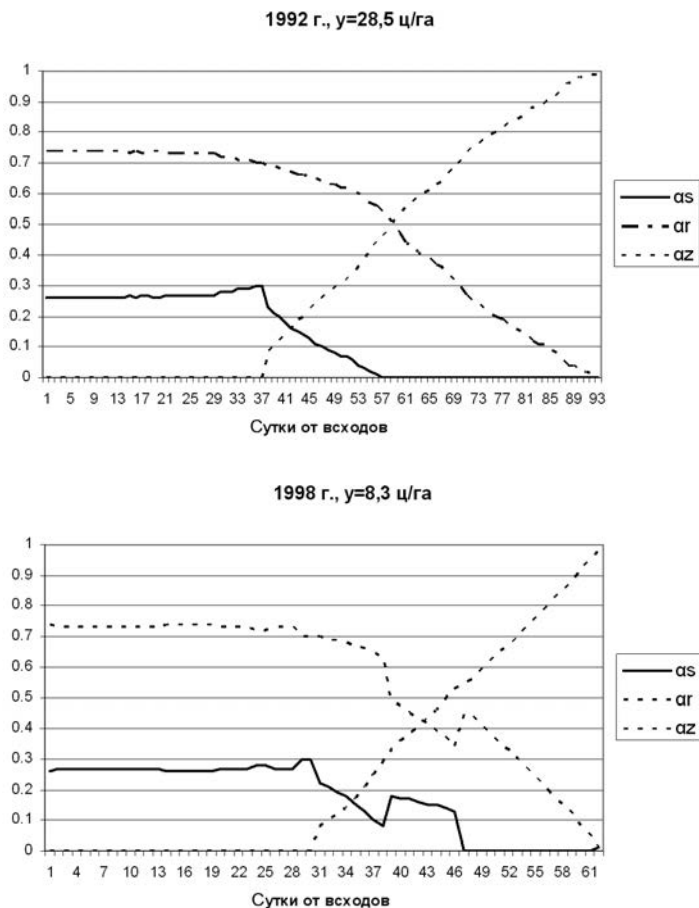


Рис. 4.2. Адаптивные ростовые функции стеблей, корней и репродуктивных органов яровой пшеницы, сформировавшиеся в 1992 и 1998 гг.

фазу развития);  $n$  – число лет наблюдений в случае использования временных рядов урожайности или общее число определений биомассы за все годы наблюдений.

Предварительным этапом робастного оценивания параметров математических моделей является выявление в ряду наблюдений  $y_1, \dots, y_n$  выбросов, т.е. наблюдений, имеющих большие дисперсии в результате нарушения условий эксперимента, неправильного измерения, либо вообще не удовлетворяющих принятой модели. Включение таких наблюдений в ряд равноправных членов выборки  $y_1, \dots, y_n$  приводит к заметному смещению оценок параметров и ухудшению свойств модели. Даже одно далеко

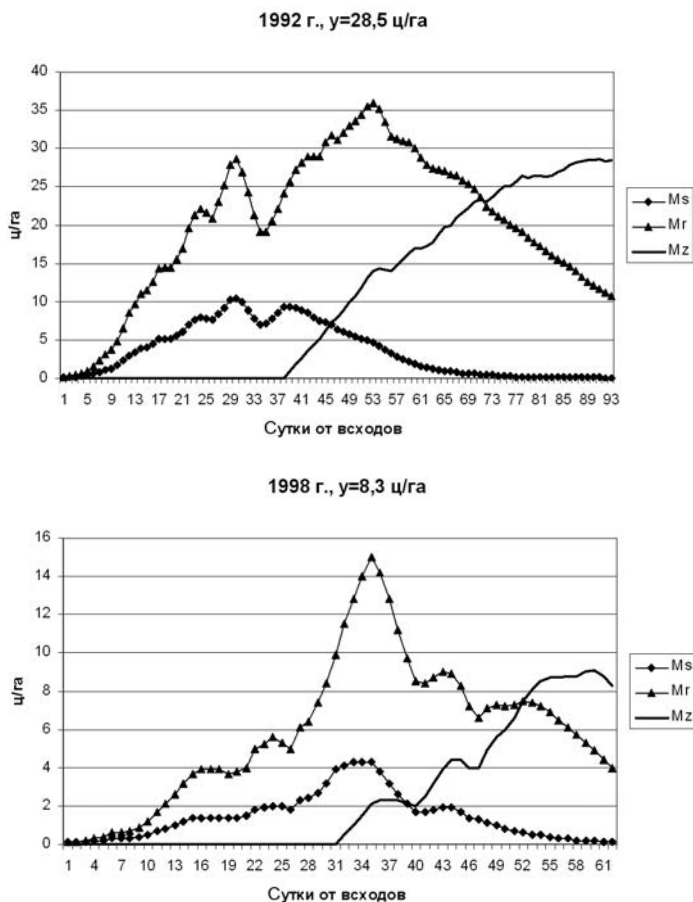


Рис. 4.3. Рассчитанная динамика биомассы стеблей Ms, корней Mr и колосьев Mz яровой пшеницы

лежащее от общей массы наблюдение может испортить оценку МНК. Выбросы должны быть отброшены, однако если среди отброшенных наблюдений оказались «хорошие», удовлетворяющие гипотезам классической теории оценивания параметров, эффективность модели может снизиться.

В нашем случае все годы наблюдений – с 1986 по 2009 г. включительно – в зависимости от погодных условий были разделены на пять типов лет: острозасушливые, засушливые, умеренно засушливые, благоприятные и влажные. Один год из 24, отнесенный к категории влажных, отличался большой вегетативной массой при очень низком урожае зерна из-за болезней и неполного созревания урожая к моменту первых

осенних заморозков, – это 1993 г., который признан не соответствующим разработанной модели формирования урожая и исключен из выборки. Целесообразность такого решения подтвердили последующие численные эксперименты – расчетная урожайность зерна в 1993 г. оказалась резко завышенной.

Согласно теории робастного оценивания МНК, оценки параметров теряют оптимальность при отклонении распределения зависимой переменной от нормального закона. Для условий Северного Казахстана обнаружены значительные отклонения распределения урожайности пшеницы от нормального закона (Уланова Е.С., Забелин В.Н., 1990). Гистограмма распределения (рис. 4.4) временного ряда урожайности яровой пшеницы, который привлечен для оценки параметров рассматриваемой модели, свидетельствует о значительном отклонении от нормальности. Нельзя не отметить значительную асимметрию распределения урожайности яровой пшеницы и даже обнаружить стремление этого распределения к бимодальной (двухвершинной) форме.

Явная несостоятельность гипотезы о нормальности распределения урожайности яровой пшеницы в Северном Казахстане заставляет использовать для калибровки параметров, наряду с (4.17), целевую функцию вида:

$$ОСО = \frac{1}{n} \sum_i |y_{\phi} - \hat{y}|^v. \quad (4.18)$$

При  $v = 2$  значения ОСО и СКО совпадают. Обобщенная средняя ошибка ОСО при  $v = 1,5$  является хорошим компромиссом между классическими МНК и робастными оценками. Некоторые исследования

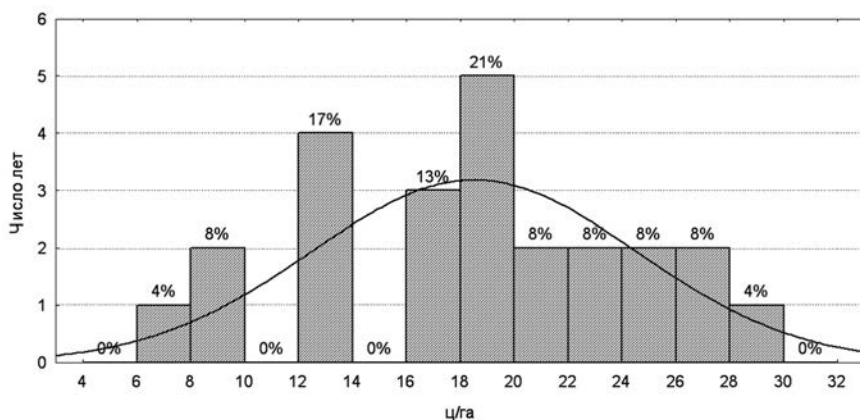


Рис. 4.4. Гистограмма распределения урожайности яровой пшеницы (по данным НПЦ зернового хозяйства им А.И. Бараева, Казахстан)

свидетельствуют об эффективности оценок при более низких значениях  $\nu$  вплоть до  $\nu = 1$ , когда минимизируется среднее абсолютное отклонение.

Для нахождения минимума функции (4.18) можно использовать общие методы оптимизации. При выборе метода оптимизации параметров динамических моделей продуктивности следует иметь в виду, что практически нет грани между калибровкой модели и ее исследованием численными методами с целью дальнейшего совершенствования. Поэтому предпочтение следует отдать самым простым методам прямого поиска минимума целевой функции. Процесс калибровки параметров такого сложного нелинейного объекта, как динамические модели продуктивности с многочисленными ограничениями на параметры, вряд ли может быть полностью формализован. Чрезмерная формализация может затруднить использование имеющейся априорной информации о возможной реакции растений на изменения условий погоды. Калибровка параметров динамических моделей на практике сводится к многократному решению задачи оптимизации при задании в каждом туре расчетов нового положения начальной точки, чтобы повысить вероятность нахождения глобального минимума и определить координаты локальных минимумов, если таковые имеются. Найденные решения могут многократно отбраковываться из-за нарушения ограничений, пока не будет найдено решение, минимизирующее функцию и удовлетворяющее физическим условиям задачи. Желательно повторить решение задачи при нескольких значениях параметра  $\nu$  (например при  $\nu = 2$  и  $\nu = 1,5$ , т. е. в классической и робастной постановке). Завершающим этапом построения модели служит проверка ее адекватности на новых не использованных для калибровки параметров материалах наблюдений.

Возвращаясь к примеру построения динамической модели формирования урожая яровой пшеницы, отметим, что применение робастной целевой функции (при  $\nu = 1,5$ ) для идентификации параметров привело к заметному улучшению модели. Величину средней квадратической ошибки удалось снизить до 3 ц/га, а оценка коэффициента корреляции между рядами фактической и рассчитанной урожайности достигла 0,85.

Представленная в качестве примера адаптационная динамическая модель формирования урожая яровой пшеницы для почвенно-климатических условий Северного Казахстана позволяет объяснить порядка 74 % дисперсии урожайности, обусловленной изменчивостью погодных условий. Данные рис. 4.5 свидетельствуют о высокой синхронности колебаний фактических и рассчитанных урожаев яровой пшеницы.

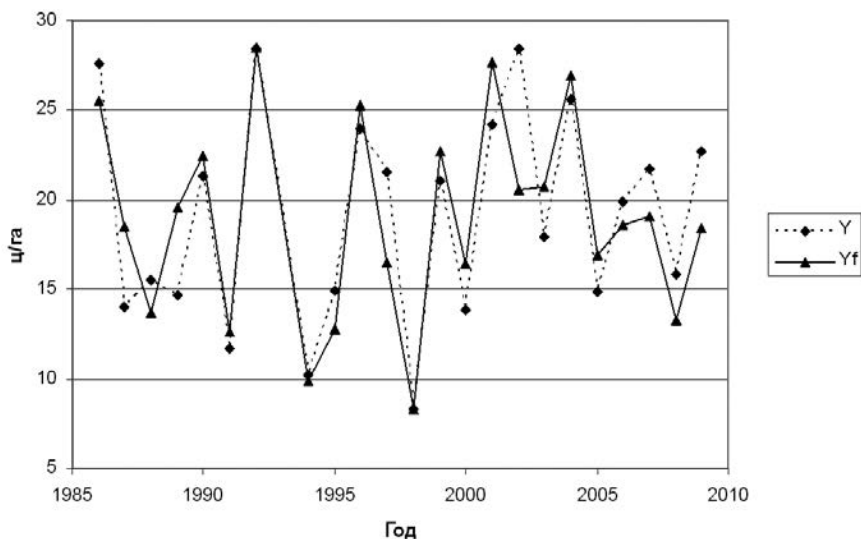


Рис. 4.5. Динамика фактических  $Y_f$  и рассчитанных  $Y$  урожаев яровой пшеницы, Северный Казахстан ( $r = 0,852$ , СКО = 3,07 ц/га)

#### 4.3. Оценка агрометеорологических условий формирования урожая с помощью динамических моделей

Проблема оценки агрометеорологических условий формирования урожайности рассмотрена с позиций динамического подхода к пониманию системы «почва–посев–атмосфера». Предложен комплекс взаимосвязанных оценок агрометеорологических условий формирования урожая яровой пшеницы.

Одно из основных направлений развития агрометеорологии – становление динамического подхода к описанию и объяснению связей между гидрометеорологическими условиями и продуктивностью посевов сельскохозяйственных культур. Этот подход стал возможен благодаря разработке теории продуктивности растительных сообществ в шестидесятые годы XX столетия. Складывалось впечатление, что достаточно абстрактные построения этой теории далеки от насущных задач агрометеорологии. Однако потребовалось не более двух десятилетий, чтобы пройти путь от первых математических моделей фотосинтеза растительного покрова до развитых динамических моделей формирования урожаев, пригодных для решения прикладных задач. К настоящему времени создано более 30 таких моделей, охватывающих практически все важнейшие полевые сельскохозяйственные культуры. Теперь, когда динамических моделей довольно много, идет интенсивная разработка гораздо более совершенных



модификаций. Все более актуальными становятся вопросы, связанные с практическим использованием этого нового аппарата.

Здесь будет рассмотрена лишь одна, но достаточно широкая область возможного использования динамических моделей – оценка агрометеорологических условий формирования урожаев. Эта сложная и не формализованная до сих пор задача всегда была в центре внимания агрометеорологов. Методы оценки условий формирования урожаев разрабатывались А.А. ШигOLEвым, Г.З. Венцкевичем, Н.А. Зубаревым, М.С. Куликом, Б.П. Пономаревым, В.П. Дмитренко, А.Р. Константиновым и др. В результате найдены связи между продуктивностью сельскохозяйственных культур и отдельными гидрометеорологическими показателями или их комплексами. Новый этап решения задачи начался с работ Ю.И. Чиркова (1969), который впервые привлек для этой цели основные положения теории фотосинтетической продуктивности растений, что позволило установить комплексные зависимости между приростом фитомассы и такими факторами, как фотосинтетически активная радиация, температура воздуха, влажность почвы, продолжительность дня, площадь ассимилирующей поверхности посева.

Предлагаемый подход также основывается на положениях современной теории продуктивности, которым при разработке соответствующих моделей придан количественный характер. При этом трехзвенная система «почва–растение–атмосфера» рассматривается как среда, в пределах которой радиационные, тепловые, влагообменные и газообменные процессы переплетены между собой в процессе тепломассопереноса, а центральное звено системы – агроценоз – моделируется как развивающаяся биологическая «машина», текущее состояние которой определяется предысторией процессов энергомассообмена с окружающей средой в онтогенезе (Сиротенко О.Д., 1981). Эта концепция, реализованная в форме динамических моделей продуктивности агроценозов, позволяет решить следующие кардинальные вопросы, составляющие суть проблемы оценки агрометеорологических условий формирования урожая.

1. Вектор, определяющий агрометеорологические условия, должен включать все переменные состояния системы «почва–посев–атмосфера», существенно влияющие на продуктивность агроценоза.

2. Факторы внешней среды не аддитивны по отношению к продуктивности агроценоза и статистически связаны между собой.

3. Влияние факторов внешней среды на основные физиологические процессы, определяющие продуктивность растений, существенно нелинейно.

4. Реакция растений на условия внешней среды существенно и закономерно изменяется в онтогенезе.

5. Для системы «почва–посев– атмосфера» характерно наличие консервативных «инерционных» переменных (запасы влаги в почве, фитомасса растений, мощность корневой системы и др.), текущие значения которых в той или иной степени предопределяют конечную продуктивность посева.

6. Формирование урожая – развивающийся во времени процесс, поэтому при оценке агрометеорологических условий любого отрезка вегетационного периода должна учитываться предыстория агроценоза от сева до начала оцениваемого периода.

Методика применения динамической модели «погода–урожай» для оценки агрометеорологических условий формирования урожая основывается на следующих соображениях. Чтобы оценить агрометеорологические условия какого-либо отрезка вегетационного периода, следует, очевидно, определить степень их отличия от некоторых эталонных условий, в качестве которых могут быть заданы: норма, метеорологический оптимум, условия прошлого года, условия экстремального года и т.д. Необходимо установить количественную меру отличия оцениваемых и эталонных условий. Наиболее важной для практики мерой отличия представляется отношение конечных урожаев, рассчитанных по фактическим и эталонным данным за оцениваемый период:

$$Y_k = \frac{y}{y_k} \cdot 100 \%,$$

где  $Y_k$  – оценка агрометеорологических условий по сравнению с условиями  $k$ -го эталона в %;  $y$ ,  $y_k$  – урожаи, рассчитанные по фактическим и эталонным данным соответственно. При  $y_k = 0$  оценивание теряет смысл, поэтому сценарий-эталон должен быть выбран таким, чтобы обеспечить получение урожаев, отличных от нуля.

Для расчета  $Y_k$  необходимо также задать метеорологические условия оставшейся части вегетационного периода от даты расчета до созревания. Как только эти принципиальные вопросы будут решены (например, путем задания в качестве эталона для оцениваемого периода и в качестве прогноза для оставшейся части вегетационного периода климатических норм), реализация рассматриваемого метода сведется к последовательному расчету ряда прогнозов урожайности:

$$y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_s.$$

Здесь  $y_0$  – прогноз урожайности на дату всходов,  $y_1$  – на конец первой декады, включающей дату всходов,  $y_i$  – на конец  $i$ -й декады,  $y_s$  – на дату созревания.

Первый прогноз –  $y_0$  – рассчитывается полностью по климатическим данным и по средним влагозапасам на дату всходов, последний –  $y_s$  – целиком по фактическим метеорологическим данным, любой промежуточный –

по фактической информации до даты прогноза и по климатическим данным после этой даты.

Ряд урожаев  $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_s$ , рассчитанный по динамической модели «погода–урожай» указанным способом, несет интересную и важную информацию, вопрос об интерпретации которой до сих пор обсуждается в агрометеорологической литературе.

Предлагается следующая система оценок, позволяющих давать содержательную интерпретацию информации, заложенной в последовательных прогнозах урожайности:

- текущие оценки декадных отрезков вегетационного периода  $\frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100 \%$ ;
- текущие оценки прошедшей части вегетационного периода  $\frac{y_i}{y_1} \cdot 100 \%$ ;
- текущие оценки прошедшей части сельскохозяйственного года  $\frac{y_i}{y_0} \cdot 100 \%$ .

Важные частные случаи этих показателей таковы:

- оценка весенних влагозапасов  $-\frac{y_i}{y_0} \cdot 100 \%$ ;
- интегральная оценка вегетационного периода  $-\frac{y_s}{y_1} \cdot 100 \%$ ;
- интегральная оценка сельскохозяйственного года  $-\frac{y_s}{y_0} \cdot 100 \%$ .

Равенство  $Y = 100 \%$  для любого из перечисленных показателей означает, что агрометеорологические условия оцениваемого прошлого периода по влиянию на конечный урожай эквивалентны заданным эталонным условиям при фиксированном сценарии будущего периода. Другими словами, если оценка какого-либо периода равна  $100 \%$ , то агрометеорологические условия этого периода эквивалентны для динамической системы «погода–урожай» заданным эталонным условиям. Оценки зависят от выбранного эталона как от единицы измерения, зависимость же их от способа составления метеорологического прогноза на оставшуюся часть вегетационного периода гораздо слабее – она в значительной степени исключается нормировкой.

Продолжим обсуждение предложенной системы оценок, рассматривая конкретные примеры. В табл. 4.1 приведены все перечисленные выше виды оценок, а также ряды прогнозов урожайности, на основании которых они получены. Расчеты выполнены по данным агрометстанции «Ершов» за десятилетний период – 1972–1981 гг. – с помощью динамической модели «погода–урожай», разработанной авторами (Сиротенко О.Д., 1981).

Таблица 4.1

Динамика прогнозируемой урожайности и оценок условий роста и развития яровой пшеницы, рассчитанных по данным агрометеорологической станции «Ершов» (Саратовская область)

Год	Показатель	Всходы	Даты окончания оцениваемых периодов										Уборка
			10 V	20 V	31 V	10 VI	20 VI	30 VI	10 VII	20 VII	31 VII		
1972	Урожайность, ц/га	4,6	4,6	3,7	3,1	1,9	1,2	0,8	0,5	—	—	0,5	
	Оценки: декады	—	100	80	84	61	63	67	62	—	—	100	
	%.: периода	100	100	80	67	41	26	17	11	—	—	11	
	года	40	40	32	27	17	10	7	4	—	—	4	
1973	Урожайность, ц/га	11,1	-	11,2	12,2	12,2	10,6	11,1	16,3	19,2	—	19,6	
	Оценки: декады	-	-	101	109	100	87	105	147	118	—	102	
	%.: периода	100	-	101	110	110	95	100	147	173	—	177	
	года	97	-	97	106	106	92	97	142	167	—	170	
1974	Урожайность, ц/га	14,3	14,5	13,2	13,0	13,9	14,6	22,3	21,6	21,1	—	21/1	
	Оценки: декады	-	101	91	98	107	105	153	97	98	—	100	
	%.: периода	100	101	92	91	97	102	156	151	148	—	148	
	года	124	126	115	113	121	127	194	188	183	—	183	
1976	Урожайность, ц/га	4,3	5,9	5,2	4,8	4,3	7,0	7,3	8,6	10,4	10,8	10,9	
	Оценки: декады	-	137	88	92	90	163	104	118	121	104	101	
	%.: периода	100	137	121	112	100	163	170	200	242	251	253	
	года	37	51	45	42	37	61	63	75	90	94	95	
1977	Урожайность, ц/га	13,5	13,5	10,7	10,5	5,8	6,3	9,4	7,9	8,0	—	8,0	
	Оценки: декады	-	100	79	98	55	109	149	84	101	—	100	
	%.: периода	100	100	79	78	43	47	70	58	59	—	59	
	года	117	117	93	91	50	55	82	69	70	—	70	

Окончание табл. 4.1

Год	Показатель	Всходы	Даты окончания оцениваемых периодов												Уборка
			10 V	20 V	31 V	10 VI	20 VI	30 VI	10 VII	20 VII	31 VII				
1978	Урожайность, ц/га	16,1	-	16,5	16,8	16,9	15,7	17,0	20,3	21,5	23,3	23,2			
	Оценки: декады	-	-	102	102	101	93	108	119	106	108	100			
	% периода	100	-	102	104	105	97	106	126	133	145	144			
	% года	140	-	143	146	147	137	148	177	187	203	202			
1979	Урожайность, ц/га	15,7	-	15,4	13,9	11,9	9,4	8,5	9,7	11,3	10,7	10,7			
	Оценки: декады	-	-	98	90	86	79	90	114	116	95	100			
	% периода	100	-	98	89	76	60	54	62	72	68	68			
	% года	137	-	134	121	103	82	74	84	98	93	93			
1980	Урожайность, ц/га	14,4	-	14,2	13,1	12,7	11,7	11,6	8,1	7,4	-	7,2			
	Оценки: декады	-	-	99	92	97	92	99	70	91	-	97			
	% периода	100	-	99	91	88	81	81	56	51	-	50			
	% года	125	-	123	114	110	102	101	70	64	-	63			
1981	Урожайность, ц/га	16,2	-	15,6	15,1	12,3	10,2	6,6	6,3	5,8	-	5,6			
	Оценки: декады	-	-	96	97	81	83	65	95	92	-	96			
	% периода	100	-	96	93	76	63	41	39	36	-	35			
	% года	141	-	136	131	107	89	57	55	50	-	49			

Урожайность яровой пшеницы, вычисленная по климатическим данным при фактических датах всходов за каждый год, изменялась не более чем на 1,5 ц/га, поэтому для удобства принята единая климатическая норма урожайности для агрометстанции «Ершов»  $y_0 = 11,5$  ц/га.

Начнем анализ с рассмотрения интегральных оценок года. За период с 1972 по 1981 г. самые неблагоприятные условия формирования урожая складывались в 1972 г. – 4 % от нормы. С другой стороны, наиболее благоприятные условия наблюдались в 1973, 1974 и 1978 гг. – 170, 183 и 202 % соответственно. Размах колебаний оценок за десятилетний период – от 4 до 202 %. Самыми близкими к норме оказались оценки 1976 г. – 95% и 1979 г. – 93 %. Однако, несмотря на то, что 1976 и 1979 гг. различаются всего лишь на 2 % по интегральной оценке, это совершенно различные в агрометеорологическом отношении годы.

Действительно, урожайность, рассчитанная по климатическим данным на дату всходов, составила в 1976 г. лишь 4,3 ц/га, в то время как в 1979 г. – 15,7 ц/га. В соответствии с этим оценка весенних влагозапасов составила 37 % для 1976 г. и 137 % для 1979 года. Чем же объяснить, что в столь различные по начальным условиям годы получены практически равные урожаи? Причина очевидна – оценка агрометеорологических условий вегетационного периода 1976 г. оказалась рекордно высокой за последнее десятилетие – 253 %, в то время как для вегетационного периода 1979 г. аналогичная оценка составила лишь 68 %. В 1976 г. за период «всходы – полная спелость яровой пшеницы» выпало 187 мм осадков, а в 1979 г. – лишь 102 мм. Таким образом, сочетание низких весенних влагозапасов с влажным летом и сочетание высоких весенних влагозапасов с сухим летом оказались эквивалентными для продуктивности яровой пшеницы.

Для более детального анализа могут использоваться оценки, характеризующие агрометеорологические условия, сложившиеся к любой интересующей дате или фазе развития растений. Приведем пример, иллюстрирующий многообразие возникающих при этом ситуаций. Так, на 20 июня 1980 г. агрометеорологические условия года складывались несколько лучше, чем на ту же дату в 1973 г. (102 и 92 % соответственно). Однако условия второй части вегетационного периода 1980 г. коренным образом изменили наметившуюся тенденцию – из-за засухи итоговая оценка упала со 102 до 63 %, в то время как за соответствующий период 1973 г. наблюдался рост оценок от 92 до 170 %.

Декадные оценки предназначены для выявления и анализа наиболее тонких эффектов влияния гидрометеорологических условий на формирование урожая. При необходимости еще большей детализации соответствующие оценки вплоть до суточных легко могут быть рассчитаны, для чего необходимо лишь изменить режим использования модели

«погода–урожай». Как показывают данные табл. 4.1, агрометеорологические условия отдельных декад за 10-летний период колебались от 42 до 163 %.

Другими словами, ожидаемая урожайность яровой пшеницы под влиянием аномалии агрометеорологических условий отдельной декады может как уменьшиться в 2 раза, так и возрасти в 1,5 раза. Так, за первую декаду июня 1977 г. ожидаемая урожайность упала почти в 2 раза – оценка этой декады составила 55 %. Продолжим анализ возможностей предлагаемой методики на примере указанной декады.

В табл. 4.2 приведены рассчитанные прибавки урожайности в различные по общему уровню увлажнения годы за счет дополнительных осадков в течение первой декады июня. Как следует из данных этой таблицы, «цена» осадков сильно меняется от года к году. В частности, эффективность дополнительных осадков падает как в аномально сухие (1972 г.), так и в аномально влажные (1978 г.) годы. В четвертой строке табл. 4.2 приведены прибавки урожая, которые были бы получены, если бы в течение декады поддерживалась «оптимальная» влажность почвы, равная 70 % полной влагоемкости. Данные этой таблицы, конечно, далеко не исчерпывают возможности активного численного экспериментирования с помощью модели «погода–урожай» для ответов на вопросы «Что будет, если ...?» Приведем еще несколько примеров, показывающих, что задача оценки агрометеорологических условий смыкается с задачами управления технологическими процессами в сельском хозяйстве. В табл. 4.3 приведены рассчитанные прибавки урожаев, позволяющие оценить эффективность однократных поливов в разные сроки и в разные по увлажнению годы (для моделирования полива верхний полутораметровый слой почвы «увлажнялся» до 70 % полной влагоемкости). Анализ этих данных показывает, что реакция посева на одинаковое воздействие чрезвычайно разнообразна в зависимости от агрометеорологических условий, детальную характеристику которым дают оценки, помещенные в табл. 4.1.

Таблица 4.2

**Рассчитанные прибавки урожаев (ц/га) яровой пшеницы вследствие различных условий увлажнения в течение первой декады июня (агрометеорологическая станция «Ершов»)**

Вариант расчета: Дополнительно выпало осадков:	Год			
	1972	1973	1977	1978
10 мм	0,1	1,0	0,9	0,5
20 мм	0,2	1,8	1,6	1,0
30 мм	0,4	2,3	2,2	1,4
Оптимальная влажность почвы	2,5	7,2	5,6	4,0

Таблица 4.3

**Рассчитанные прибавки урожаев (ц/га) яровой пшеницы за счет  
однократных поливов в различные по условиям увлажнения годы  
(агрометеорологическая станция «Ершов»)**

Срок поливов	Год			
	1972	1973	1977	1978
Всходы	4,1	5,8	6,2	2,3
Выход в трубку	2,7	6,2	5,5	3,6
Колошение	1,3	4,4	2,9	6,8

Рассмотренная система оценок погодных условий, дополненная численными экспериментами, моделирующими влияние на урожай отдельных переменных состояния системы «почва–растение–атмосфера», открывает новые возможности для развития методов агрометеорологического обеспечения сельского хозяйства. Использование динамических моделей позволяет осуществлять не только достаточно дифференцированный количественный контроль агрометеорологических условий формирования урожая, но и получать необходимую информацию для выработки рекомендаций по оптимизации оперативных решений.



## ГЛАВА 5

# ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ МОНИТОРИНГА ЗАПАСОВ ПРОДУКТИВНОЙ ВЛАГИ И СОСТАВЛЯЮЩИХ УГЛЕРОДНОГО БАЛАНСА ОРГАНИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА ПАХОТНЫХ ПОЧВ

### 5.1. Схема расчета динамики влагозапасов почвы

Ключевыми параметрами для оценки состояния посевов и прогнозирования продуктивности сельскохозяйственных культур могут служить запасы продуктивной влаги и составляющие углеродного баланса органического вещества.

Запасы продуктивной влаги относятся к сложным для определения и анализа агрометеорологическим параметрам. Так, применяемый на наблюдательной сети Росгидромета термостатно-весовой метод определения влажности почвы не вполне удовлетворяет требованиям практики по точности измерений и по репрезентативности получаемой информации, а также из-за трудоемкости технологии. Главным недостатком метода является то, что результаты измерений характеризуют сравнительно небольшие участки, в то время как влагозапасы почвы чрезвычайно изменчивы в пространстве и времени.

Значительная пространственная изменчивость физических полей почвенного увлажнения, зависящая от большого числа разнородных факторов, обусловила поиск метода получения информации о влагозапасах почвы на больших площадях – это расчетный метод, основанный на использовании метеорологической информации.

Проблемой связи водного режима почв с метеорологическими условиями занимались многие исследователи. В работе (Вериго С.А., Разумова Л.А., 1963) были предложены методы расчета динамики запасов продуктивной влаги для различных периодов вегетации по статистическим уравнениям для черноземных и оподзоленных почв. Эти методы используются в системе агрометеорологического обеспечения аграрного сектора страны подразделениями Роскомгидромета. Весенние влагозапасы рассчитываются на основе дефицита запасов продуктивной влаги осенью и суммы осадков за зимне-весенний период. Для расчета влагозапасов почвы в период вегетации используется средняя за декаду температура воздуха, сумма осадков за декаду и запасы продуктивной влаги к началу декады. Недостатком такой схемы расчета динамики запасов продуктивной влаги является необходимость задания величины влагозапасов на начало вегетационного периода.

Для устранения этого недостатка предложена схема непрерывного круглогодичного мониторинга влагозапасов почвы.

Реализованная схема мониторинга динамики запасов продуктивной влаги (Сиротенко О.Д. и др., 2008) охватывает 30 регионов Центрального, Приволжского и Южного федеральных округов. Она позволяет решать как задачи прогнозирования урожайности зерновых культур на территории Русской равнины, так и задачи оценки влияния изменений климата на сельское хозяйство. Расчеты ведутся для пахотного и метрового слоев почвы круглогодично.

Начальные запасы продуктивной влаги для заданного многолетнего периода задаются один раз в конце октября. Для расчетов в холодный период года используется уравнение:

$$W_{III} = W_X + bTz \frac{W_X}{W_Z} + cRz \left( 1 - \frac{W_X}{W_Z} \right) + d, \quad (5.1)$$

$$Tz = \frac{1}{6} (T_X^{i-1} + T_{XI}^{i-1} + T_{XII}^{i-1} + T_I^i + T_{II}^i + T_{III}^i) \text{ и } Rz = 0,5R_X^{i-1} + R_{XI}^{i-1} + R_{XII}^{i-1} + R_I^i + R_{II}^i + R_{III}^i,$$

где  $I, II, \dots, III$  – календарные месяцы;  $i, i-1$  – текущий и предшествующий год;  $W_k$  – средние за  $k$ -й месяц запасы продуктивной влаги;  $T_k^i$  – средне-месячная температура воздуха за  $k$ -й месяц в  $i$ -м году;  $R_k^i$  – сумма осадков за  $k$ -й месяц в  $i$ -м году;  $W_Z$  – константа, равная 45 для пахотного слоя и 180 – для метрового;  $b, c, d$  – индивидуальные для каждого субъекта Российской Федерации эмпирические коэффициенты.

В качестве примера в табл. 5.1 приведены используемые в уравнении (5.1) коэффициенты  $b, c, d$  для Воронежской, Саратовской и Волгоградской областей.

Таблица 5.1

**Коэффициенты  $b, c, d$  для расчета влагозапасов пахотного и метрового слоев почвы в марте**

Области	0–20 см			0–100 см		
	$b$	$c$	$d$	$b$	$c$	$d$
Воронежская	1,65	0,11	10,69	5,94	0,44	5,37
Саратовская	1,36	0,18	7,99	0,26	0,64	3,29
Волгоградская	4,45	0,15	8,38	8,32	0,49	21,04

Для расчета средних за  $k$ -й месяц значений запасов продуктивной влаги в пахотном слое для теплого периода года (апрель–октябрь) используется уравнение вида:

$$Wp_k = a_k Wp_{k-1} + b_k T_k + c_k (R_{k-1} + R_k) + d_k, \quad (5.2)$$

где  $a_k, b_k, c_k, d_k$ , – индивидуальные для каждого субъекта Российской Федерации эмпирические коэффициенты по месяцам.

Для расчета среднемесячных значений запасов продуктивной влаги в метровом слое для апреля–октября используется уравнение вида:

$$W_k = b_k W_{k-1} + c_k Wp_k + d_k, \quad (5.3)$$

где  $Wp_k$  – средние за  $k$ -й месяц запасы продуктивной влаги в пахотном слое.

Получены следующие оценки точности прогностических уравнений для расчета влагозапасов в пахотном и метровом слоях почвы (табл. 5.2). Для пахотного слоя почвы средние значения коэффициентов корреляции между рассчитанными значениями влагозапасов и данными наблюдений составляют 0,741–0,787, а для метрового слоя почвы – 0,646–0,693. Таким образом, схема обеспечивает непрерывный расчет влагозапасов почвы на протяжении заданного числа лет.

Таблица 5.2

**Коэффициенты корреляции между рассчитанными значениями влагозапасов и измеренными данными за 1951–1977 гг.**

Область, край, республика	0–20 см				0–100 см			
	V	VI	IX	X	V	VI	IX	X
Белгородская	0,860	0,809	0,628	0,701	0,737	0,820	0,604	0,640
Брянская	0,655	0,727	0,720	0,668	0,520	0,653	0,720	0,650
Владимирская	0,681	0,833	0,891	0,778	0,489	0,546	0,736	0,630
Волгоградская	0,807	0,692	0,697	0,837	0,612	0,593	0,528	0,633
Воронежская	0,824	0,790	0,656	0,756	0,822	0,798	0,506	0,663
Нижегородская	0,916	0,859	0,886	0,810	0,795	0,798	0,787	0,738
Ивановская	0,773	0,775	0,828	0,835	0,704	0,631	0,744	0,811
Калужская	0,615	0,786	0,851	0,841	0,615	0,639	0,814	0,737
Костромская	0,673	0,782	0,842	0,699	0,624	0,741	0,812	0,709
Краснодарский край	0,750	0,862	0,599	0,680	0,708	0,796	0,540	0,689
Самарская	0,715	0,789	0,856	0,879	0,715	0,703	0,745	0,761
Курская	0,819	0,903	0,758	0,842	0,714	0,875	0,643	0,794
Липецкая	0,659	0,559	0,393	0,623	0,686	0,522	0,213	0,610
Московская	0,687	0,764	0,847	0,892	0,680	0,713	0,846	0,789
Орловская	0,728	0,799	0,785	0,844	0,437	0,657	0,755	0,787
Пензенская	0,867	0,793	0,798	0,776	0,819	0,683	0,536	0,684
Ростовская	0,855	0,863	0,747	0,830	0,713	0,782	0,527	0,545
Рязанская	0,583	0,892	0,863	0,907	0,592	0,853	0,833	0,855
Саратовская	0,845	0,778	0,781	0,866	0,677	0,714	0,585	0,588
Ставропольский край	0,798	0,838	0,625	0,678	0,628	0,706	0,424	0,646
Тамбовская	0,828	0,812	0,772	0,727	0,746	0,824	0,733	0,563
Республика Татарстан	0,650	0,860	0,864	0,779	0,582	0,676	0,777	0,738
Ульяновская	0,733	0,599	0,781	0,773	0,514	0,568	0,683	0,689
Чувашская Республика	0,812	0,689	0,751	0,749	0,565	0,235	0,468	0,589
Ярославская	0,398	0,828	0,729	0,634	0,456	0,804	0,847	0,756
Среднее	0,741	0,787	0,758	0,776	0,646	0,693	0,656	0,692

Значимость влагозапасов почвы, как одного из предикторов урожайности, можно оценить по тесноте статистических связей с урожайностью сельскохозяйственных культур. В табл. 5.3 представлены осредненные по 30 регионам Русской равнины оценки коэффициентов корреляции между урожайностью зерновых культур и запасами продуктивной влаги в мае-июне.

Таблица 5.3

**Осредненные по 30 регионам Русской равнины оценки коэффициентов корреляции для связей «урожайность–влагозапасы почвы», 1967–2009 гг.**

Месяц, слой почвы	Данные расчетов				Измеренные данные			
	Озимая пшеница	Озимая рожь	Яровой ячмень	Зерновые и зернобоб.	Озимая пшеница	Озимая рожь	Яровой ячмень	Зерновые и зернобоб.
Май, 0–20	0,41	0,40	0,30	0,40	0,31	0,37	0,31	0,38
Май, 0–100	0,36	0,41	0,31	0,40	0,18	0,26	0,21	0,26
Июнь, 0–20	0,53	0,57	0,58	0,64	0,33	0,38	0,45	0,49
Июнь, 0–100	0,49	0,54	0,51	0,59	0,26	0,31	0,40	0,43

Из данных табл. 5.3 следует, что использование восстановленных влагозапасов вместо непосредственно наблюдаемых величин влагозапасов обеспечивает в подавляющем большинстве случаев заметное приращение информативности этих показателей для расчета урожайности.

## 5.2. Схема расчета динамики запасов углерода

Не менее важным фактором при определении ожидаемой продуктивности сельскохозяйственных культур является углеродный баланс органического вещества, который в значительной степени влияет на динамику доступных форм азота, фосфора и калия и тем самым контролирует процессы роста и продуктивности растений.

В рассматриваемой схеме мониторинга используется модифицированная О.Д. Сиротенко версия модели RothC (Coleman, Jenkinson, 1996). Органический углерод почвы разделяется на четыре активных пула, которые представлены легкоразлагаемыми растительными остатками ( $C_1$ ), трудноразлагаемым растительным материалом ( $C_2$ ), микробной биомассой ( $C_3$ ) и гумифицированным органическим веществом ( $C_4$ ). Система уравнений для расчета составляющих углеродного баланса органического вещества имеет вид:

$$\begin{aligned}
 C_1^{j+1} &= C_1^j \exp \left( -a^{j+1} b^{j+1} c^{j+1} \frac{k_1}{12} \right) + 0,59R^{j+1} + 0,49F^{j+1}, \\
 C_2^{j+1} &= C_2^j \exp \left( -a^{j+1} b^{j+1} c^{j+1} \frac{k_2}{12} \right) + 0,41R^{j+1} + 0,49F^{j+1}, \\
 C_3^{j+1} &= C_3^j \exp \left( -a^{j+1} b^{j+1} c^{j+1} \frac{k_3}{12} \right) + 0,46V^j P_x, \\
 C_4^{j+1} &= C_4^j \exp \left( -a^{j+1} b^{j+1} c^{j+1} \frac{k_4}{12} \right) + 0,54V^j P_x + 0,02F^{j+1}, \\
 V_i^j &= C_i^j \left[ 1 - \exp \left( -a^{j+1} b^{j+1} c^{j+1} \frac{k_i}{12} \right) \right], \\
 V^j &= V_1^j + V_2^j + V_3^j + V_4^j,
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

где  $a^j$  – зависимость скорости разложения органического вещества почвы (ОВП) от температуры;  $b^j$  – зависимость скорости разложения ОВП от влажности почвы;  $c^j$  – коэффициент, который равен 0,6 при наличии растительного покрова, или единице при его отсутствии;  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – скорости минерализации пулов;  $R^{j+1}$  – количество растительных остатков;  $F^{j+1}$  – количество внесенных органических удобрений;  $V^j$  – суммарные потери органического углерода за данный месяц;  $P_x$  – доля потерь  $V^j$ , зависящая от механического состава почвы (содержания физической глины).

Для целей прогнозирования урожайности зерновых культур представляют интерес два показателя – суммарная скорость разложения четырех фракций ОВП за октябрь предшествующего года ( $V_{op10}$ ) и скорость разложения гумусной фракции за период с марта по май ( $V_{v4}$ ). В табл. 5.4 представлены оценки тесноты статистических связей данных показателей и урожайности сельскохозяйственных культур за 1967–1995 гг. для 30 регионов Русской равнины.

Достаточно тесная связь наблюдается между урожайностью зерновой ржи и суммарной скоростью разложения четырех фракций ОВП за октябрь предшествующего года: для озимой пшеницы средний коэффициент корреляции составляет 0,406, для озимой ржи – 0,463, для ярового ячменя – 0,337, для всех зерновых и зернобобовых в целом – 0,437. Для яровых культур теснота связи  $V_{op10}$  и  $V_{v4}$  с урожайностью ниже, чем для озимых культур и всех зерновых в целом. Таким образом, наличие значимых статистических связей между скоростью разложения органического вещества и урожайностью следующего года позволяет использовать этот показатель для прогнозирования в комплексе с другими предикторами, определяемыми в процессе мониторинга.

На основе рассчитанных рядов запасов продуктивной влаги и запасов углерода в пахотном слое почвы получены 4 вида уравнений для прогноза урожайности основных зерновых культур в октябре, апреле, мае и июне:

$$\begin{aligned} Y_{10} &= a \cdot V_{op10} + b \cdot n + c \cdot n^2 + d \cdot n^3, \\ Y_4 &= a \cdot V_{op10} + b \cdot V_{v4} + c \cdot n + d \cdot n^2 + e \cdot n^3, \\ Y_5 &= a \cdot V_{op10} + b \cdot V_{v4} + c \cdot T_5 + d \cdot W_5 + e \cdot n + f \cdot n^2 + g \cdot n^3, \\ Y_6 &= a \cdot V_{op10} + b \cdot V_{v4} + c \cdot T_5 + d \cdot W_5 + e \cdot T_6 + f \cdot W_6 + g \cdot n + h \cdot n^2 + i \cdot n^3, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $Y_{10}, Y_4, Y_5, Y_6$  – прогнозируемая урожайность;  $V_{op10}$  – суммарная скорость разложения четырех фракций ОВП за октябрь предшествующего года;  $V_{v4}$  – скорость разложения гумусной фракции за период с марта по май;  $T_5, T_6$  – средняя температура за май и июнь соответственно;  $W_5, W_6$  – запасы продуктивной влаги в пахотном слое почвы за май и июнь соответственно;  $n = 1, 2, 3, \dots$  – номер года;  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  – индивидуальные для каждого региона коэффициенты.

Таблица 5.4

**Оценки тесноты статистических связей урожайности  
сельскохозяйственных культур, суммарной скорости разложения  
четырёх фракций ОВП (октябрь предыдущего года) и скорости разложения  
гумусной фракции за период с марта по июнь, 1967–2009 гг.**

Область, край, республика	Суммарная скорость разложения четырёх фракций ОВП за октябрь предшествующего года				Скорость разложения гумусной фракции за период с марта по май			
	озимая пшеница	озимая рожь	яровой ячмень	зерновые	озимая пшеница	озимая рожь	яровой ячмень	зерновые
Белгородская	0,562*	0,598*	0,411*	0,551*	0,459*	0,483*	0,434*	0,497*
Брянская	0,378*	0,446*	0,320*	0,469*	0,487*	0,327*	0,271	0,372*
Владимирская	0,265	0,304	0,249	0,295	0,513*	0,477*	0,178	0,286
Волгоградская	0,327*	0,417*	0,031	0,352*	0,565*	0,569*	0,201	0,533*
Воронежская	0,360*	0,436*	0,312*	0,369*	0,511*	0,443*	0,346*	0,446*
Нижегородская	0,526*	0,558*	0,476*	0,599*	0,480*	0,364*	0,319*	0,360*
Ивановская	0,394*	0,489*	0,287	0,332*	0,429*	0,441*	0,212	0,227
Калужская	0,595*	0,667*	0,513*	0,632*	0,164	0,127	0,099	0,105
Костромская	0,163	0,339*	0,191	0,225	0,140	0,305	0,263	0,340*
Краснодарский край	0,551*	0,444*	0,097	0,475*	0,725*	0,593*	0,356*	0,645*
Самарская	0,038	0,131	0,247	0,170	0,343*	0,409*	0,110	0,314*
Курская	0,558*	0,708*	0,404*	0,534*	0,359*	0,249	0,263	0,297
Липецкая	0,626*	0,691*	0,620*	0,695*	0,302	0,239	0,180	0,223
Республика Марий Эл	0,301	0,481*	0,181	0,374*	0,272	0,239	0,025	0,148
Республика Мордовия	0,530*	0,539*	0,521*	0,621*	0,434*	0,346*	0,207	0,276
Московская	0,546*	0,598*	0,416*	0,519*	0,356*	0,516*	0,019	0,155
Оренбургская	0,161	0,081	0,361*	0,325*	0,353*	0,441*	0,164	0,239
Орловская	0,708*	0,740*	0,684*	0,778*	0,297	0,199	0,212	0,225
Пензенская	0,051	0,171	0,132	0,112	0,421*	0,232	0,142	0,200
Ростовская	0,329*	0,277	0,014	0,271	0,483*	0,557*	0,315*	0,458*
Рязанская	0,600*	0,611*	0,545*	0,696*	0,403*	0,272	0,238	0,312*
Саратовская	0,012	0,142	0,100	0,027	0,455*	0,513*	0,192	0,438*
Ставропольский край	0,732*	0,710*	0,503*	0,718*	0,821*	0,771*	0,731*	0,807*
Тамбовская	0,467*	0,385*	0,315*	0,434*	0,353*	0,238	0,132	0,226
Республика Татарстан	0,552*	0,672*	0,613*	0,630*	0,645*	0,594*	0,543*	0,571*
Тульская	0,571*	0,599*	0,482*	0,633*	0,412*	0,333*	0,149	0,264
Удмуртская Республика	0,122	0,293	0,251	0,438*	0,133	0,135	0,171	0,147
Ульяновская	0,171	0,321*	0,044	0,026	0,563*	0,511*	0,153	0,373*
Чувашская Республика	0,313*	0,508*	0,189	0,261	0,577*	0,581*	0,249	0,403*
Ярославская	0,671*	0,547*	0,587*	0,546*	0,276	0,337*	0,338*	0,326*
Среднее	0,406*	0,463*	0,337*	0,437*	0,424*	0,395*	0,240	0,340*

Примечание. \* – оценки значимы при 5%-ном уровне.

В табл. 5.5 приведены оценки множественных коэффициентов корреляции ( $R$ ) для полученных уравнений. Средний коэффициент корреляции для прогноза урожайности в мае достаточно высок ( $R > 0,7$ ). Для озимой пшеницы он составляет 0,714, для озимой ржи – 0,706. Для ярового ячменя средний коэффициент корреляции для прогноза в июне равен 0,715, для всех зерновых и зернобобовых в целом – 0,755. Высокие коэффициенты корреляции позволяют сделать вывод, что ежемесячный численный

мониторинг запасов продуктивной влаги и составляющих углеродного баланса органического вещества пахотных почв позволяет составлять достаточно надежные ежемесячные прогнозы урожайности зерновых культур, начиная с мая, примерно для 75 % субъектов Российской Федерации.

Таблица 5.5

**Оценки адекватности регрессионных моделей для прогнозирования урожайности зерновых культур, 1967–2009 гг.**

Область, край, республика	Озимая пшеница		Озимая рожь		Яровой ячмень		Зерновые	
	май	июнь	май	июнь	май	июнь	май	июнь
Белгородская	0,692	0,747	0,751	0,803	0,659	0,681	0,730	0,781
Брянская	0,687	0,701	0,600	0,648	0,496	0,705	0,589	0,696
Владимирская	0,739	0,740	0,566	0,584	0,406	0,509	0,534	0,614
Волгоградская	0,721	0,793	0,747	0,878	0,657	0,853	0,749	0,856
Воронежская	0,712	0,733	0,679	0,745	0,622	0,710	0,691	0,769
Нижегородская	0,790	0,796	0,676	0,676	0,571	0,625	0,758	0,778
Ивановская	0,677	0,698	0,753	0,757	0,556	0,633	0,451	0,574
Калужская	0,730	0,754	0,790	0,839	0,597	0,767	0,688	0,801
Костромская	0,434	0,448	0,590	0,594	0,586	0,599	0,500	0,554
Краснодарский край	0,808	0,832	0,716	0,742	0,755	0,786	0,766	0,821
Самарская	0,653	0,753	0,724	0,807	0,570	0,784	0,535	0,787
Курская	0,711	0,730	0,739	0,744	0,551	0,561	0,669	0,682
Липецкая	0,736	0,740	0,752	0,792	0,715	0,789	0,798	0,826
Республика Марий Эл	0,672	0,708	0,680	0,698	0,516	0,667	0,616	0,724
Республика Мордовия	0,816	0,824	0,778	0,788	0,653	0,702	0,819	0,836
Московская	0,694	0,720	0,767	0,778	0,475	0,666	0,573	0,701
Оренбургская	0,617	0,693	0,642	0,739	0,590	0,818	0,579	0,803
Орловская	0,840	0,849	0,804	0,840	0,718	0,843	0,829	0,880
Пензенская	0,524	0,524	0,523	0,524	0,496	0,590	0,560	0,601
Ростовская	0,706	0,794	0,739	0,845	0,632	0,721	0,697	0,796
Рязанская	0,772	0,793	0,677	0,724	0,619	0,717	0,798	0,843
Саратовская	0,630	0,719	0,652	0,756	0,593	0,817	0,643	0,805
Ставропольский край	0,891	0,911	0,887	0,901	0,861	0,912	0,885	0,916
Тамбовская	0,665	0,690	0,560	0,630	0,493	0,614	0,604	0,681
Республика Татарстан	0,883	0,926	0,910	0,936	0,814	0,885	0,846	0,899
Тульская	0,740	0,747	0,685	0,730	0,568	0,724	0,708	0,775
Удмуртская Республика	0,661	0,745	0,554	0,591	0,522	0,711	0,644	0,779
Ульяновская	0,676	0,741	0,710	0,729	0,457	0,701	0,567	0,702
Чувашская Республика	0,715	0,729	0,739	0,739	0,408	0,539	0,528	0,618
Ярославская	0,838	0,840	0,784	0,784	0,827	0,833	0,714	0,742
Среднее	0,714	0,747	0,706	0,745	0,599	0,715	0,669	0,755

В заключение отметим, что представленная численная схема позволяет вести непрерывный круглогодичный мониторинг динамики запасов продуктивной влаги без задания ежегодных начальных условий и, кроме того, позволяет вести ретроспективный анализ динамики увлажнения почвы на основании восстановленных однородных рядов запасов продуктивной влаги за продолжительный период времени. Таким образом, рассмотрен пример построения модели динамики составляющих водного и углеродного цикла агроценоза на территории Русской равнины.

## ГЛАВА 6

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ХОЗЯЙСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВАНИИ АГРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОГНОЗОВ

Земля является основным ресурсом сельскохозяйственного производства, а эффективность ее использования определяет условия устойчивого экономического развития. Эта актуальная для современной России проблема имеет несколько составляющих, среди которых учет климатических и погодных условий играет одну из важнейших ролей.

Гидрометеорологическая информация и составляемые на ее основе агрометеорологические прогнозы – значительный резерв повышения эффективности сельского хозяйства в рамках инновационных технологий. Низкая (практически нулевая для производителя сельскохозяйственной продукции) стоимость гидрометеорологической информации совершенно не соответствует ее значимости для сельского хозяйства России – страны с преимущественно рискованным земледелием и самым суровым климатом на Земле. Цель настоящей главы – рассмотреть математические модели, с помощью которых могут быть оптимизированы хозяйственные решения на основании прогнозов и/или расчетов урожайности, составляемых по данным агрометеорологических наблюдений.

Пусть ставится задача расширения производства какого-либо вида сельскохозяйственной продукции путем максимизации среднеегодового урожая:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i s_i \equiv \bar{y} \bar{s}, \quad (6.1)$$

где  $i$  – номер года;  $N$  – число лет;  $y_i$ ,  $s_i$  – соответственно, урожайность и посевная площадь данной культуры в  $i$ -м году.

Черта сверху означает среднее по времени. Если посевная площадь не меняется год от года, т.е.  $(s_i = \bar{s})$ , то средний валовой урожай  $\bar{Y}_0$  равен, очевидно, произведению  $\bar{Y}_0 = \bar{y} \bar{s}$ .

Легко показать, что  $\bar{Y}$  и  $\bar{Y}_0$  связаны между собой соотношением:

$$\bar{Y} = \bar{Y}_0 (1 + r_{ys} V_y V_s), \quad (6.2)$$

где  $r_{ys}$  – коэффициент корреляции между урожайностью и посевной площадью, а  $V_y$ ,  $V_s$  – коэффициенты вариации этих величин, равные отношению среднего квадратического отклонения к среднему арифметическому, т.е.

$$V_y = \sigma_y / \bar{y} \quad \text{и} \quad V_s = \sigma_s / \bar{s}.$$

Формула (6.2) показывает, что чем точнее прогнозы урожайности, тем больше отношение  $\bar{Y} / \bar{Y}_0$  и, следовательно, тем эффективнее решения,



принимаемые на основе прогнозов урожайности. Мерой точности прогнозирования обычно служит коэффициент корреляции  $r_{y\hat{y}}$  между фактической ( $y$ ) и прогнозируемой ( $\hat{y}$ ) урожайностью. При этом  $s = a\hat{y}$  ( $a > 0$ ), а  $r_{ys}$  и  $r_{y\hat{y}}$  совпадают ( $r_{ys} = r_{y\hat{y}}$ ).

Максимум  $Y$  достигается, следовательно, лишь при точном прогнозировании урожайности, т.е. при  $r_{y\hat{y}} = 1$ .

Величина  $Y$ , согласно (6.2), зависит еще от двух коэффициентов –  $V_y$ ,  $V_s$ . Коэффициент вариации  $V_y$  определяется главным образом климатическими условиями и практически не поддается управлению. Величина  $V_s$ , напротив, полностью зависит от производителя сельскохозяйственной продукции и ограничивается лишь наличными резервами посевной площади. Заметим, что  $V_s = 1$  для важного частного случая – альтернативной стратегии «все или ничего», когда при благоприятном прогнозе урожайности резервная площадь засеивается ( $s = 1$ ), а при неблагоприятном прогнозе посев не производится ( $s = 0$ ). Максимально возможный в этом случае выигрыш при  $V_s = 0,5$  достигает 50 %.

### 6.1. Оптимизация структуры посевных площадей на основании прогнозов урожайности

Предположим, что посевная площадь  $s_i$  для данной сельскохозяйственной культуры определяется в зависимости от ожидаемой урожайности по правилу:

$$s_i = a\hat{y}_i, \quad (6.3)$$

где  $\hat{y}_i$  – прогнозируемая в  $i$ -м году урожайность;  $a$  – коэффициент пропорциональности ( $a > 0$ ). При  $\hat{y}_i = 0$  сев не проводится и  $s_i = 0$ . Естественно предположить, что для прогнозирования урожайности используется уравнение регрессии, для которого среднее значение прогнозируемой урожайности равно среднему значению фактической урожайности, а дисперсии этих величин связаны соотношением:

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = r_{y\hat{y}}^2 \sigma_y^2. \quad (6.4)$$

Здесь  $\sigma_{\hat{y}}^2$  и  $\sigma_y^2$  – оценки дисперсии прогнозируемой и фактической урожайности;  $r_{y\hat{y}}^2$  – коэффициент детерминации случайных величин  $y$  и  $\hat{y}$ . На основании (6.3) и (6.4) определим  $V_s$ , и с учетом того, что  $r_{y\hat{y}} = r_{ys}$  вместо (6.2), получим окончательно:

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{Y}_0} = 1 + r_{y\hat{y}}^2 V_y^2. \quad (6.5)$$

Эффективность ежегодной корректировки посевных площадей по правилу (6.5) зависит от произведения двух величин – коэффициента детерминации  $r_{y\hat{y}}^2$ , характеризующего точность прогнозирования урожайности до сева, и квадрата коэффициента вариации временного

ряда урожайности. Оба параметра практически полностью определяются погодными и климатическими условиями.

Рассчитанные по (6.5) значения  $\bar{Y}/\bar{Y}_0$  представлены в табл. 6.1 (линейное правило). В первой строке приведены оценки эффективности ежегодной корректировки посевных площадей при низкой оправдываемости прогнозов урожайности ( $r_{y\hat{y}} = 0,5$ ), во второй – при средней (0,7) и в третьей – при высокой (0,9). Точность долгосрочных агрометеорологических прогнозов урожайности зависит от вида сельскохозяйственной культуры, климатических условий территории и степени стабильности агротехники. Точность прогнозов среднеобластной урожайности ранних яровых зерновых культур на дату сева можно оценить коэффициентом корреляции порядка 0,7 для значительной части территории лесостепной и степной зон.

Таблица 6.1

**Приращения среднегодового валового урожая (%) с помощью ежегодной корректировки посевной площади на основании прогноза урожайности по линейному, альтернативному и экспоненциальному правилам**

$r_{y\hat{y}}$	Коэффициент вариации урожайности						
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Линейное правило							
0,5	1,0	2,2	4,0	6,2	9,0	12,2	16,0
0,7	2,0	4,4	7,8	12,2	17,6	24,0	31,4
0,9	3,2	7,3	13,0	20,2	29,2	39,7	51,8
Альтернативное правило							
0,5	9,7	13,6	17,5	21,5	25,4	29,3	33,3
0,7	10,5	16,1	21,7	27,4	32,8	38,4	44,0
0,9	14,8	18,7	29,7	33,8	41,2	48,7	56,2
Экспоненциальное правило							
0,5	3,8	7,8	12,7	18,3	24,1	30,8	37,5
0,7	6,8	13,4	21,3	29,9	39,1	48,6	58,3
0,9	11,0	21,3	33,1	45,9	59,2	72,9	86,8

Оценки коэффициентов вариации среднеобластной урожайности за период с 1970 по 1998 г. приведены в табл. 6.2. Коэффициенты вариации для ярового ячменя, озимой и яровой пшеницы повсеместно (за исключением нескольких областей) превышают 20 %. Максимальные коэффициенты вариации (до 50–60 % для яровых зерновых культур) характерны для наиболее засушливых районов Европейской России. Данные табл. 6.2 позволяют заключить, что приращение среднемноголетней валовой урожайности в результате ежегодной корректировки посевных площадей по правилу (6.3) будет значимым на юго-востоке и юге Европейской России. Так, в Самарской и Саратовской областях при  $V = 0,5$

приращение среднегодовых валовых урожаев яровой пшеницы должно находиться в пределах 12–20 %.

Таблица 6.2

**Оценки временной изменчивости среднеобластных значений урожайности зерновых культур за 1970–1998 гг.**

Область, край, республика	Яровой ячмень		Яровая пшеница		Озимая пшеница	
	$\sigma_y$ , т/га	$V$ , %	$\sigma_y$ , т/га	$V$ , %	$\sigma_y$ , т/га	$V$ , %
Архангельская	2,6	28	2,7	24	-	-
Вологодская	2,1	20	3,5	19	-	-
Ленинградская	4,0	25	2,5	30	3,6	19
Новгородская	3,0	32	2,3	26	2,4	23
Псковская	2,6	28	3,7	29	1,6	14
Брянская	4,5	33	3,4	20	3,8	23
Владимирская	3,7	23	2,4	24	3,8	23
Ивановская	3,4	26	4,4	45	3,5	27
Тверская	2,9	26	2,0	22	3,0	26
Калужская	3,4	28	5,4	27	3,0	23
Костромская	2,8	30	3,8	25	3,1	23
Московская	5,0	25	3,6	27	4,7	21
Орловская	5,4	32	3,0	30	5,4	29
Рязанская	4,9	32	3,6	21	5,3	31
Смоленская	3,0	26	2,2	23	2,8	23
Тульская	4,2	24	3,0	22	5,0	27
Ярославская	3,4	32	2,9	26	2,7	23
Нижегородская	3,9	25	4,9	31	4,9	31
Кировская	3,3	28	3,0	23	4,4	37
Республика Марий Эл	4,4	29	4,3	22	5,5	32
Республика Мордовия	4,0	26	6,4	41	5,3	35
Чувашская Республика	5,1	25	5,3	34	5,7	28
Белгородская	6,2	30	4,3	24	5,9	23
Воронежская	6,0	33	4,2	29	6,3	27
Курская	5,1	26	3,9	30	4,6	20
Липецкая	5,0	28	3,2	76	7,0	35
Тамбовская	5,2	31	4,1	53	5,7	28
Астраханская	3,3	62	3,8	35	4,5	36
Волгоградская	5,1	48	3,5	31	6,2	34
Самарская	4,8	35	3,9	50	6,2	33
Пензенская	4,3	33	4,0	28	5,4	32
Саратовская	5,4	49	3,8	50	6,4	38
Ульяновская	5,1	31	6,0	37	6,3	35
Республика Калмыкия	4,3	46	5,6	29	5,4	36
Республика Татарстан	6,5	40	4,5	38	6,1	34
Краснодарский край	5,0	20	3,6	38	6,3	18
Ставропольский край	5,3	33	3,8	28	6,2	28
Ростовская	5,2	33	2,6	27	5,6	24

Закономерен вопрос: нельзя ли повысить эффективность ежегодной корректировки посевных площадей с помощью замены (6.3) другим правилом? Из (6.2) следует, что при росте кривизны функции  $s = f(\hat{y})$  увеличивается значение  $V_s$ , но одновременно уменьшается  $r_{ys}$ , поэтому оценить, как изменится произведение  $V_s r_{ys}$  при замене (6.3) нелинейной функцией, с помощью аналитических методов достаточно трудно.

Для решения этой задачи представляется удобным использовать метод Монте-Карло, приняв в качестве первого приближения допущение, что распределения  $y$  и  $\hat{y}$  подчиняются двумерному нормальному закону. Эта технология позволяет испытать любую нелинейную зависимость в качестве правила  $s = f(\hat{y})$  и получить результаты расчетов в формате табл. 6.1, как и для аналитической зависимости (6.3).

Рассмотрим эффективность простейшего нелинейного правила назначения посевных площадей по прогнозу урожайности:

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{y} \geq \bar{y} \\ 0, & \text{если } \hat{y} < \bar{y} \end{cases}, \quad (6.6)$$

где  $\bar{y}$  – средняя многолетняя урожайность (норма). Правило (6.6) очень удобно, поскольку для его реализации необходим лишь знак прогноза урожайности  $\hat{y}_i - \bar{y}$ . Применение этого правила предполагает, что весьма значительный в современных условиях «избыточный» земельный фонд будет использоваться не ежегодно, а лишь в те годы, когда ожидаемый урожай превышает норму и более высока вероятность окупаемости затрат на сев, уход за посевами и уборку урожая.

Результаты расчетов с помощью метода Монте-Карло при использовании правила (6.6) представлены в табл. 6.1. Альтернативная стратегия назначения посевных площадей, как показывают данные табл. 6.1, значительно более эффективна для всего диапазона изменения параметров. Сопоставим первую и четвертую строки табл. 6.1 для «плохих» прогнозов урожайности ( $r_{y\hat{y}} = 0,5$ ). При  $V = 0,2$  переход от линейной к альтернативной стратегии повышает эффективность метода почти в 10 раз, при  $V = 0,4$  – в 4 раза, а при  $V = 0,6$  – в 2,8 раза. При более высокой оправдываемости прогнозов урожайности ( $r_{y\hat{y}} = 0,7$  и  $0,9$ ) рост эффективности метода за счет перехода к альтернативной стратегии также весьма значителен, хотя и не так велик, как для «плохих» прогнозов. Этот результат статистического моделирования еще раз подтверждает известный вывод о том, что оптимизация процедур использования прогнозов способна в значительной степени повысить их эффективность, особенно при низкой оправдываемости последних.

Правило назначения посевных площадей (6.6) является очень удобным, но, разумеется, не самым эффективным из числа теоретически возможных. Для подтверждения сказанного приведем результаты расчетов по усеченной экспоненциальной зависимости между посевной площадью и прогнозируемой урожайностью:

$$s_i = \begin{cases} s_0 \exp(c \hat{y}), & \text{если } s_i \leq s_1 \\ s_1, & \text{если } s_i > s_1 \end{cases}, \quad (6.7)$$

где  $s_0$  и  $s_1$  – соответственно, нижняя и верхняя границы для  $s_i$  ( $c > 0$  – параметр). При расчетах, результаты которых представлены в табл. 6.1, предполагалось, что  $s_0 = 1$  га,  $s_1 = 100$  га, а величина  $c$  определялась для каждой пары значений  $V$  и  $r_{y\hat{y}} = 0,7$  из условия максимума  $\bar{Y}/Y_0$ .

Сопоставим экспоненциальное правило с рассмотренным ранее альтернативным. Правило (6.7) более эффективно для сочетания  $r_{y\hat{y}}$  и  $V_y$ , лежащих ниже диагональных элементов таблицы, а (6.6), напротив, более эффективно для сочетаний  $r_{y\hat{y}}$  и  $V_y$ , расположенных выше этой диагонали. Максимальный выигрыш при использовании экспоненциального правила достигается при наибольших значениях  $V_y$  и  $r_{y\hat{y}}$ . Так, при  $V_y = 0,8$  и  $r_{y\hat{y}} = 0,9$  приращение среднегодового валового урожая в результате ежегодного назначения посевных площадей по правилу (6.7) составляет 86,8 %, тогда как аналогичная величина при использовании правила (6.6) равна 56,2 %. Однако при  $V_y = 0,2$  и  $r_{y\hat{y}} = 0,5$  эффективность правила (6.7) составляет лишь 3,8 %, тогда как применение (6.6) обеспечивает рост среднего валового урожая на 9,7 %.

Вывод очевиден – стратегия оптимизации посевных площадей должна выбираться в зависимости от оценок  $r_{y\hat{y}}$  и  $V_y$ , т. е. от возможной точности прогнозирования урожайности и степени ее межгодовой изменчивости. Тем не менее альтернативная стратегия, строящаяся на основе альтернативных прогнозов, имеет несомненные преимущества. Методически корректный альтернативный прогноз урожайности получить значительно легче, чем прогноз абсолютных значений урожайности, поскольку при альтернативном прогнозировании ослабляются требования к учету агротехнического тренда урожайности.

## 6.2. Оптимизация размещения сельскохозяйственных культур

Поскольку представленный выше математический аппарат в равной степени применим для исследования как временного, так и пространственного распределения посевных площадей, перейдем сразу к содержательной стороне проблемы. Анализ территориального распределения посевных площадей особенно актуален в связи с процессом реформирования нашего сельского хозяйства. Как отметил А.А. Жученко (1990 г.), «если к 1900 г. в европейской части России и даже в пределах отдельных губерний структура основных сельскохозяйственных культур была четко приурочена (методом «проб и ошибок») к определенным почвенно-климатическим макро- и микроронам, то при сложившейся к настоящему времени структуре посевных площадей наблюдается неоправданная мозаичность приоритетности культур даже в сопредельных областях и районах».

Для объективной оценки степени адаптивности распределения посевных площадей в табл. 6.3 представлены необходимые для расчетов с помощью (6.1) показатели  $-V_y$ ,  $K$  и  $r_{ys}$ . Из данных этой таблицы следует, что для ярового ячменя значения  $r_{ys}$  для отдельных лет и в среднем за восьмилетний период значимо не отличаются от 0, а оценки  $K$  близки к 1. Для яровой пшеницы коэффициенты корреляции между урожайностью и распределением посевных площадей в отдельные годы отрицательны ( $r_{ys} = -0,39$  в 1998 г.). В целом за последние годы распределение посевных площадей этой культуры скорее можно назвать контрадаптивным, чем адаптивным ( $r_{ys} = -0,13$ ).

Для озимой пшеницы положение иное – оценки  $r_{ys}$  для всех лет с 1991 по 1998 г. значимы при 5 %-ном уровне. Среднее за восьмилетний период отношение  $\bar{Y}/Y_0$  составляет:

$$\bar{Y}/Y_0 = 1 + 0,365 \cdot 1,425 \cdot 0,53 = 1,28.$$

Таблица 6.3

**Оценки пространственной изменчивости урожайности и посевных площадей зерновых культур на Европейской территории России**

Параметр	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	Среднее
<b>Яровой ячмень</b>									
$V_y$	38,9	41,1	33,8	38,5	39,2	34,7	37,3	47,4	38,9
$V_s$	90,6	97,3	99,9	97,1	102,5	95,3	106,8	105,7	99,4
$r_{y,\hat{y}}$	0,89	0,83	0,85	0,88	0,73	0,63	0,49	0,79	0,76
$r_{ys}$	-0,08	0,15	0,18	0,17	-0,17	-0,09	0,23	-0,13	0,03
<b>Яровая пшеница</b>									
$V_y$	46,9	42,7	39,1	40,3	37,3	45,5	38,5	48,4	42,3
$V_s$	217,4	224,2	226,0	224,2	208,3	212,4	199,9	194,7	213,4
$r_{y,\hat{y}}$	0,90	0,81	0,69	0,79	0,75	0,69	0,57	0,81	0,75
$r_{ys}$	-0,23	0,06	-0,20	-0,16	-0,24	-0,04	0,16	-0,39	-0,13
<b>Озимая пшеница</b>									
$V_y$	36,3	29,1	45,7	38,4	37,1	29,8	28,2	47,8	36,5
$V_s$	163,0	135,5	128,0	157,0	142,5	134,8	145,4	133,8	142,5
$r_{y,\hat{y}}$	0,89	0,86	0,90	0,83	0,78	0,72	0,77	0,83	0,82
$r_{ys}$	0,63	0,53	0,73	0,48	0,59	0,39	0,39	0,47	0,53

Таким образом, с помощью адаптации распределения посевных площадей к почвенно-климатическим условиям валовой урожай озимой пшеницы на европейской части России на 28 % выше по сравнению с некоррелированным (с урожайностью) распределением посевных площадей ( $r_{ys} = 0$ ).

Эффективность оптимизации пространственного распределения посевных площадей (как и в задаче ежегодной корректировки) зависит от двух неуправляемых параметров – коэффициента вариации  $V_y$  и коэффициента корреляции между рядами фактической и прогнозируемой урожайности

$r_{y\hat{y}}$  (табл. 6.3). Наибольшей пространственной изменчивостью отличается урожайность яровой пшеницы (42 %), а наименьшей – урожайность озимой пшеницы (36 %). В качестве предиктора для прогнозирования ежегодного распределения урожайности по территории использовались соответствующие ряды среднеобластных урожаев за предшествующий период с 1980 по 1990 год. Как и следовало ожидать, точность прогнозирования среднеобластной урожайности по ее средним значениям за предшествующий 11-летний период оказалась довольно высока. Так, средние значения  $r_{y\hat{y}}$  составили: для ячменя – 0,76, для яровой пшеницы – 0,75 и для озимой пшеницы – 0,82. Использовался легко реализуемый, но, разумеется, не лучший способ прогноза. При ежегодном обновлении таких прогнозов их точность может быть повышена, приведенные же в табл. 6.3 величины можно рассматривать как гарантированные оценки точности расчета пространственного распределения урожайности.

При использовании таких гарантированных прогнозов урожайности адаптационная составляющая валовых урожаев оказалась следующей:

- для ячменя –  $0,389 \cdot 0,994 \cdot 0,76 = 0,29$ ;
- для яровой пшеницы –  $0,423 \cdot 2,134 \cdot 0,75 = 0,67$ ;
- для озимой пшеницы –  $0,365 \cdot 1,425 \cdot 0,82 = 0,43$ .

Таким образом, перераспределение посевных площадей зерновых пропорционально их средней урожайности за прошлые годы могло бы привести к росту валовых сборов зерна ярового ячменя на 29 %, а яровой пшеницы – на 67 %. Для озимой пшеницы прирост составил лишь  $43 - 28 = 15$  %, поскольку сложившееся распределение уже обеспечило повышение урожая этой культуры на 28 %.

Приведенные оценки эффективности адаптации посевных площадей получены при условии, что параметры распределения посевных площадей – математическое ожидание и коэффициент вариации – остаются неизменными при оптимизации. Последнее условие снижает эффективность оптимизации и не является обязательным. Поэтому заменим его другими ограничениями и продолжим рассмотрение задачи в следующей постановке. Найдем распределение  $s_i$ , максимизирующее линейную функцию

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i s_i \rightarrow \max, \quad (6.8)$$

при ограничениях  $s_i > 0$ ,  $s_i \leq s_i^{\max}$ ,  $\sum_{i=1}^n s_i = s_{\Sigma}$ . (6.9)

Здесь  $n$  – размерность искомой функции;  $s_i^{\max}$  – максимальная посевная площадь в  $i$ -й области (районе);  $\sum_{i=1}^n s_i = s_{\Sigma}$  – распределяемая посевная площадь. Задача (6.8)–(6.9) относится к классу задач линейного программирования.

В табл. 6.4 представлены примеры решения задачи оптимизации посевных площадей яровой пшеницы для 38 областей, краев и республик Российской Федерации.

Таблица 6.4

**Оценка эффективности оптимизации посевных площадей методом линейного программирования на примере яровой пшеницы за период с 1991 по 1998 год**

Область, край, республика	$\bar{Y}$ , т/га	$S$ , тыс. га	$S_{min}$ , тыс. га	Верхняя граница посевных площадей				
				1,2 s	1,4 s	1,6 s	1,8 s	2,0 s
Вологодская	1,33	33,1	33,1	1	1	1	1	1
Ленинградская	2,01	2,08	0,6	1	1	1	1	1
Новгородская	0,89	1,90	1,9	1	1	1	0	0
Псковская	0,85	3,40	2,2	1	0	0	0	0
Брянская	1,19	26,9	4,7	1	1	1	1	1
Владимирская	1,70	24,1	13,1	1	1	1	1	1
Тверская	0,99	24,0	10,9	1	1	1	1	0
Калужская	0,81	12,7	1,1	1	0	0	0	0
Костромская	0,90	22,7	14,4	1	1	1	0	0
Московская	2,11	9,9	0,1	1	1	1	1	1
Орловская	1,37	108,2	4,2	1	1	1	1	1
Рязанская	1,22	37,5	5,0	1	1	1	1	1
Смоленская	0,89	12,3	0,2	1	1	1	0	0
Тульская	1,70	87,0	27,1	1	1	1	1	1
Ярославская	0,90	15,3	14,0	1	1	1	0	0
Нижегородская	1,40	154,3	78,1	1	1	1	1	1
Кировская	1,11	219,7	169,5	1	1	1	1	1
Республика Марий Эл	1,41	63,1	6,9	1	1	1	1	1
Республика Мордовия	1,33	93,8	63,5	1	1	1	1	1
Чувашская Республика	1,90	123,4	58,7	1	1	1	1	1
Белгородская	1,35	7,3	0,1	1	1	1	1	1
Воронежская	1,47	36,0	1,0	1	1	1	1	1
Курская	1,78	48,9	3,5	1	1	1	1	1
Липецкая	1,29	56,0	0,5	1	1	1	1	1
Тамбовская	1,23	72,7	4,1	1	1	1	1	1
Астраханская	0,39	8,7	6,9	0	0	0	0	0
Волгоградская	0,74	284,6	72,5	0	0	0	0	0
Самарская	1,02	466,6	198,9	1	1	1	1	1
Пензенская	1,08	201,9	78,0	1	1	1	1	1
Саратовская	0,76	870,7	426,4	0	0	0	0	0
Ульяновская	1,43	239,8	123,5	1	1	1	1	1
Республика Калмыкия	0,75	21,0	0,2	0	0	0	0	0
Республика Татарстан	1,44	690,7	464,7	1	1	1	1	1
Краснодарский край	1,96	3,5	6,2	1	1	1	1	1
Ростовская	1,14	14,8	6,6	1	1	1	1	1
Оренбургская	0,87	2016,1	1466,6	1	1	1	0	0
Республика Башкортостан	1,32	1053,2	826,3	1	1	1	1	1
Пермская	0,90	262,9	216,0	1	1	1	0	0

*Примечание.*  $\bar{Y}$  – средняя урожайность за 1980–1990 гг.,  $s$  – посевная площадь яровой пшеницы в 1998 г.,  $s_{min}$  – минимальная посевная площадь с 1991 по 1998 г. включительно. Верхняя граница посевной площади обозначена 1, нижняя – 0.



Верхняя граница посевной площади  $s_{\max}$  для каждого субъекта Российской Федерации определялась путем умножения фактической посевной площади за 1998 г. на коэффициенты 1,2, 1,4, 1,6, 1,8 и 2,0. В качестве нижней границы  $s_{\min}$  взята фактическая минимальная посевная площадь за период с 1991 по 1998 год. Посевная площадь яровой пшеницы за последние годы практически повсеместно росла, поэтому приведенные в табл. 4 значения  $s_{\min}$  характеризуют состояние посевных площадей в начале периода (т. е. за 1991–1993 гг.). Заметим, что более чем 50 %-ный рост посевных площадей яровой пшеницы сопровождается уменьшением посевных площадей двух других зерновых культур – озимой пшеницы и ярового ячменя – на 20–25 %.

Эффективность всех пяти вариантов решения задачи оценивалась, по сравнению с распределением посевных площадей в 1998 г., на независимом материале – фактических данных об урожайности за 1991–1998 гг. Получены следующие оценки возможного приращения валового сбора зерна за 1991–1998 гг.:

Вариант	1,2 s	1,4 s	1,6 s	1,8 s	2,0 s
Приращение валового сбора зерна, %	9,6	17,9	25,5	31,7	36,9

Эффективность адаптации посевных площадей к почвенно-климатическим условиям зависит от степени ее радикальности, т.е. в данном случае – от верхней границы допустимого предела посевных площадей (нижняя граница  $s_{\min}$  для всех вариантов совпадала). При возможном увеличении посевных площадей яровой пшеницы в отдельных областях на 20 % валовой урожай повышался на 9,6 %, тогда как при допустимом увеличении посевных площадей на 100 % рост валового урожая составил 36,9 % при неизменной суммарной площади, отводимой под данную культуру.

Результаты конкретных задач оптимизации посевных площадей яровой пшеницы (табл. 6.4) подтверждают вывод о высокой эффективности адаптации посевных площадей зерновых культур в условиях России, который был сделан на основании анализа оценок  $V_y$ ,  $r_{ys}$  и  $r_{y\hat{y}}$  (табл. 6.3).

Задача (6.8)–(6.9) легко обобщается для случая нескольких культур. Так, для трех культур – ячменя, озимой и яровой пшеницы – размерность задачи утраивается, а условие  $s_i \leq s_i^{\max}$  заменяется аналогичным ограничением на величину суммарной площади всех трех зерновых культур в каждой отдельно взятой области. Результаты проверки эффективности перераспределения посевных площадей для трех культур при условии  $s_i^{\min} = 0$  оказались следующими:

Верхняя граница посевной площади, % от 1998 года	120	140	160	180	200
Приращение валового сбора зерна за 1991–1998 гг., %	9,2	16,5	23,8	30,7	35,3

Итак, эффективность оптимизации распределения посевных площадей для трех культур осталась примерно на том же уровне, что и эффективность оптимизации для одной культуры – яровой пшеницы. Задачу (6.8)–(6.9) желательно решать комплексно для всего набора сельскохозяйственных культур, но, как показывают расчеты, при этом не следует ожидать очень большого повышения эффективности, по сравнению с результатами оптимизации для отдельных культур. Решение задачи (6.8)–(6.9) максимизирует валовой сбор зерна  $Y$ , но при этом может повыситься межгодовая изменчивость  $Y$ , т.е. возрасти дисперсия  $\sigma_Y^2$ . Снижение устойчивости производства сельскохозяйственной продукции ведет к экономическим потерям. По этой причине задачу (6.8)–(6.9) необходимо дополнить следующим ограничением, исключающим возможность роста дисперсии валового урожая:

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_i s_j \sigma(y_i) \sigma(y_j) r(y_i, y_j) \leq \sigma_{Y_0}^2, \quad (6.10)$$

где  $r(y_i, y_j)$  – элементы матрицы коэффициентов корреляции рядов урожайности  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ;  $\sigma(y_i)$  и  $\sigma(y_j)$  – среднеквадратические отклонения;  $\sigma_{Y_0}^2$  – дисперсия валовой урожайности при исходном распределении посевных площадей. Поскольку (6.10) – квадратическая функция, задача (6.8)–(6.10) становится нелинейной. Задача оптимизации структуры посевных площадей в постановке (6.8)–(6.10) до сих пор не исследовалась. Тем не менее принцип биоклиматической взаимокompенсации, предлагающий для стабилизации валовых сборов сельскохозяйственной продукции маневрирование посевными площадями отдельных культур в зависимости от сроков сева, скороспелости, засухоустойчивости, а также от складывающихся агрометеорологических условий, обсуждался неоднократно (Жуковский Е.Е., 1980).

В заключение нельзя не коснуться вопроса оптимизации размещения сельскохозяйственных культур с целью более полного использования агроклиматических ресурсов. Рассмотрим одну из таких задач – задачу о льготном кредитовании производителей сельскохозяйственной продукции.

Пусть  $Q$  – общая сумма (руб.) льготного кредита, подлежащая распределению;  $c_i$  – затраты на производство данного вида сельскохозяйственной продукции в расчете на 1 га посевной площади (руб./га);  $y_i$  – ожидаемая урожайность (т/га);  $i$  – номер области, района или хозяйства. Задача распределения кредита для увеличения валового производства сельскохозяйственной продукции сводится к максимизации следующей целевой функции:

$$\sum_{i=1}^n q_i z_i \rightarrow \max, \quad (6.11)$$

при естественных ограничениях

$$q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n q_i = Q, \quad (6.12)$$

где  $z_i = y_i/c_i$ ,  $q_i = f(z_i)$ ,  $f$  – известная функция. При линейной зависимости  $q_i(z_i)$  задача (6.11)–(6.12), как было показано выше, решается аналитически, при нелинейной – с помощью метода Монте-Карло. При  $c_1 = c_0$  результаты решения (6.11)–(6.12) представлены в табл. 6.1. Из данных этой таблицы следует, например, что при коэффициенте вариации урожайности, равном 50 %, и точности определения ожидаемой урожайности  $r_{y,\hat{y}} = 0,9$ , эффективность распределения кредитов по линейному правилу равна 120, по альтернативному – 134, а по экспоненциальному – 146 %. Последнюю оценку можно интерпретировать так: распределение кредитов по экспоненциальному правилу повышает эффективность их использования на 146 %, по сравнению с недифференцированным распределением.

Рассмотренный пример показывает, что проблема адаптации сельского хозяйства к изменяющимся климатическим условиям теснейшим образом связана с задачами макроэкономического регулирования аграрного сектора экономики.

## ГЛАВА 7

# МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ КЛИМАТА ДЛЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ

### 7.1. Статистический анализ агроклиматической информации

Применению статистических методов агроклиматологии посвящен ряд специализированных монографий (Уланова Е.С., Сиротенко О.Д., 1968; Уланова Е.С., Забелин В.Н., 1990), излагается этот материал и в учебниках (Дроздов О.А. и др., 1989). Однако предлагаемые в этих публикациях методы статистического анализа временных рядов основываются на представлении о практической неизменности климата. Для создания эффективных методов статистического анализа климатической информации в условиях изменяющегося климата эта устоявшаяся парадигма должна быть пересмотрена.

Изменения климата ведут к трансформации функций плотности распределения гидрометеорологических элементов. Трансформация функций распределения выражается прежде всего в сдвиге положения центров распределения, а также в росте или уменьшении изменчивости гидрометеорологических показателей.

Рис. 7.1 может служить иллюстрацией, объясняющей влияние различных направлений изменения климата на повторяемость климатических экстремумов на примере температуры воздуха. Из этого рисунка следует, что повторяемость жаркой погоды может повыситься не только в результате роста средней температуры, но и при росте изменчивости температуры или при комбинации этих изменений. С помощью рис. 7.1 легко объяснить, почему при повышении средней температуры и значительном росте ее изменчивости может возрасти вероятность наступления холодной погоды. Потепление климата, таким образом, не должно обязательно сопровождаться снижением повторяемости экстремально низких температур.

При исследовании изменений климата важнейшим является вопрос о реальности этих изменений и, следовательно, о надежности результатов статистического анализа материалов наблюдений. Отметим, что любые статистические выводы лишь отчасти основываются на наблюдениях. Столь же важную основу этих выводов составляют исходные априорные предположения об исследуемой ситуации.

От таких предположений не требуется абсолютной точности, однако весьма желательно, чтобы они были устойчивы, т.е. малая ошибка в используемой математической модели не должна приводить к существенной

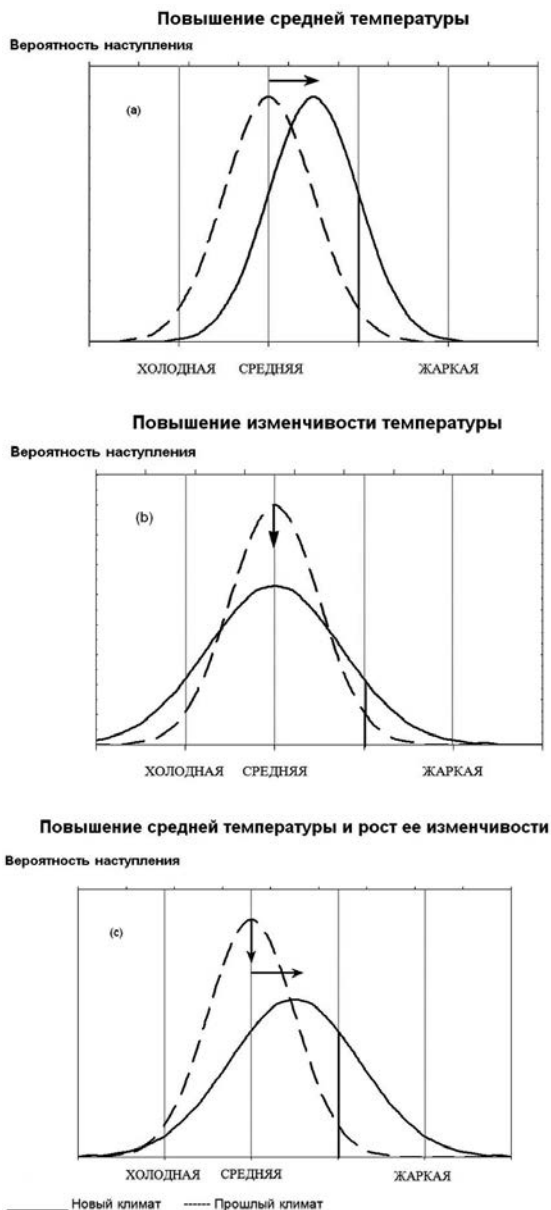


Рис. 7.1. Схематические диаграммы, показывающие, что повышение вероятности наступления жаркой погоды возможно: при росте средней температуры (а), росте изменчивости температуры (б) и при одновременном росте как средней температуры, так и ее изменчивости (с)

ошибке в окончательных выводах. Этому принципу отвечают далеко не все статистические модели. Установлено, что некоторые наиболее распространенные статистические процедуры (в том числе и те, которые оптимальны в предположении о нормальности распределения) весьма чувствительны к довольно малым отклонениям от исходных предположений. К ним относятся статистические процедуры определения средних значений и дисперсий. Статистические модели, слабо чувствительные к небольшим отклонениям от априорных предположений, называются робастными.

Среднее арифметическое не является робастной оценкой центра распределения. Понимание этого факта нашло отражение в рекомендации использовать в климатологии наряду со средним арифметическим выборочную медиану. Для плотности распределения непрерывной случайной величины  $f(x)$  медианой  $M$  является такая точка, что:

$$\int_{-\infty}^M f(x)dx = 0,5. \quad (7.1)$$

Таким образом, медиана равна такому значению случайной величины  $x = M$ , которое делит пополам площадь под кривой ФПР.

Для оценки  $M$  по результатам наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  используют выборочную медиану, которую определяют по соответствующему ряду упорядоченных по возрастанию наблюдений  $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \dots < \hat{x}_n$ . Выборочной медианой называют величину  $\hat{x}_{k+1}$ , если  $n = 2k + 1$  нечетно, и  $(\hat{x}_k + \hat{x}_{k+1}) \cdot 2$ , если  $n = 2k$  четно. Легко убедиться, что  $M$  устойчива к большим ошибкам наблюдений. Малая чувствительность медианы к ошибкам наблюдений, и в том числе к нарушению однородности временных рядов, – одно из достоинств этой статистики. Медиана является удобной характеристикой центра распределения случайных величин, распределение которых не является симметричным. Вместе с тем среднее более устойчиво, чем медиана – стандартная ошибка оценки среднего меньше ошибки медианы. Однако, когда распределение далеко от нормального, среднее может оказаться величиной непоказательной. Медиана всегда показательна и дает в этом случае лучшую меру ожидания, чем среднее, поскольку половина наблюдений находится в каждой стороне от нее.

Для отслеживания трансформации функций распределения гидрометеорологических показателей в результате изменений климата можно использовать специальные диаграммы: E-V и M-АМО. На рис. 7.2 в качестве примера представлены такие диаграммы для агроклиматических показателей, рассчитанных по данным многолетних метеорологических наблюдений. Для построения E-V-диаграммы на вертикальную ось графика наносятся значения скользящих средних (E), а на горизонтальную – соответствующие скользящие оценки (V) средних квадратических отклонений. Точки наносятся в хронологическом порядке от первой  $V_H = V_1$

до последней  $V_k$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) и соединяются прямыми линиями, либо сплайнами, как это показано на рис. 7.2. По истечении каждого следующего года рассчитываются координаты новой  $k + 1$  точки и эта точка также наносится на график Е-V. Диаграмма таким образом позволяет осуществлять постоянный мониторинг текущих изменений и/или колебаний климата. Среднее значение и среднее квадратическое отклонение совместно полностью определяют функцию плотности нормального распределения. Величина расстояния между соседними точками  $V_i$  и  $V_{i+1}$  характеризует степень изменения (деформации) кривой распределения плотности вероятности за счет добавления нового наблюдения и изъятия самого «старого» наблюдения анализируемого временного ряда. Чем сильнее эти два наблюдения отличаются друг от друга, тем на большее расстояние каждый год смещается точка, характеризующая текущее состояние климата. Если новое и старое наблюдения совпадают, то точка  $V_i$  сохраняет свое положение на диаграмме. Таким образом, расстояние между точками  $V_i$  и  $V_{i+1}$  на Е-V-диаграмме характеризует скорость изменения распределения рассматриваемого агроклиматического показателя за  $i+1$  год.

Робастным аналогом Е-V-диаграммы является М-АМО-диаграмма. При этом для оценки центра распределения вместо среднего значения временного ряда используется его медиана, а для оценки изменчивости вместо среднего квадратического отклонения привлекается абсолютное медианное отклонение – АМО. АМО определяется как медиана абсолютных отклонений от медианы.

Каждая точка на рис. 7.2 соответствует состоянию климата за предшествующий 30-летний период, закончившийся в 1975, 1976, ...2003 гг. соответственно ( $V_H$  и  $V_k$  – начальная и конечная точки).

$$АМО_n = Med \{ |X_i - M_n| \}, \text{ где } M_n = Med \{ X_i \}, \quad (7.2)$$

где  $M_n$  – медиана временного ряда  $x_i$ .

Данные рис. 7.2 позволяют сопоставить Е-V- и М-АМО-диаграммы, характеризующие динамику параметров функции плотности распределения двух агроклиматических показателей – гидротермического коэффициента и биоклиматического потенциала за последние 30 лет. Обе диаграммы дают достаточно согласованную картину наблюдаемых изменений увлажненности территории Ростовской области. Оценки средних величин и медианы ГТК за рассматриваемый период увеличились с 0,60 до 0,76 и с 0,50 до 0,72 соответственно. Наряду с заметным ростом увлажненности, которая характеризуется гидротермическим коэффициентом, существенно возросла и междугодовая изменчивость условий увлажнения. Среднее квадратическое отклонение повысилось с 0,22 до 0,32, т.е. на 45 %, а оценка абсолютного медианного отклонения возросла более чем в 2 раза – с 0,10 до 0,24. Рост увлажненности, как следует из рис. 7.2,

привел к увеличению биоклиматического потенциала – оценки среднего и медианы повысились, соответственно, на 27 и 23 %.

Траектории движения точек, характеризующих динамику климатических условий с 1975 по 2003 г., как следует из данных рис. 7.2, не были монотонными и однонаправленными. Тем не менее основная тенденция этих изменений, которую можно оценить, сопоставляя положение точек

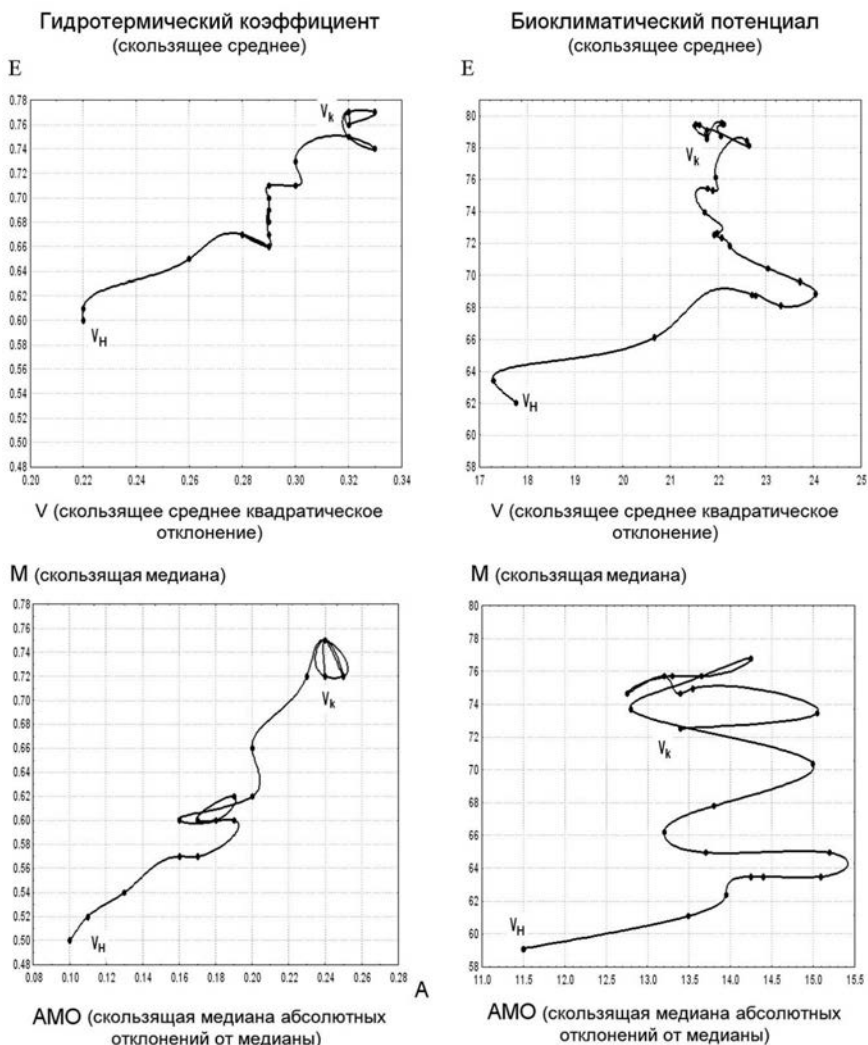


Рис. 7.2. Диаграммы изменений центров (Е и М) распределений и разброса (V и АМО) агроклиматических показателей для скользящих 30-летних периодов с 1975 по 2003 г. (ГМС «Константиновский», Ростовская обл.)



$V_H$  и  $V_k$ , достаточно однозначна, наблюдаемые изменения климата привели как к росту увлаженности, так и к значительному росту продуктивности сельскохозяйственных угодий. Вместе с тем отчетливо проявилась тенденция к увеличению межгодовой изменчивости гидротермического коэффициента, в то время как заметный в начале периода рост дисперсии БКП практически прекратился в последние десятилетия.

Ускорение процесса изменения глобального климата в результате антропогенного парникового эффекта приводит к тому, что данные наблюдений за прошлые годы все быстрее «устаревают», а полученные на их основании значения «норм» становятся все менее пригодными для прогнозов на ближайший период времени. Вопрос об оптимальном периоде осреднения для расчета норм обсуждается давно, но в настоящее время он приобретает особую актуальность. Уже с момента принятия «стандартного» 30-летнего периода осреднения климатических величин ряд исследователей полагали, что в связи с изменением климата 30-летний период научно не обоснован. Аргументация в пользу более коротких периодов осреднения до сих пор ограничивалась указанием на необходимость учета систематических погрешностей метеорологических наблюдений, связанных с недостаточной репрезентативностью станций, их микроклиматическими особенностями и т.д.

Точность определения климатических норм не должна, как полагалось, превышать показатель неоднородности ряда наблюдений. Это условие позволило получить следующий критерий для определения целесообразной длительности периода осреднения для расчета «норм»:

$$\sigma_{\bar{x}} \leq \sigma_0, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_0}}, \quad (7.3)$$

где  $n_0$  – минимальная целесообразная длительность периода наблюдений;  $\sigma_x$  и  $\sigma_{\bar{x}}$  – средние квадратические отклонения исходного ряда и ряда средних значений  $\bar{x}$  соответственно;  $\sigma_0$  – заданная мера однородности ряда.

При наличии линейного тренда, вызванного изменениями климата, дисперсию временного ряда можно разложить на две составляющие:

$$\sigma_x^2 = (1 - r^2) \sigma_x^2 + r^2 \sigma_x^2, \quad (7.4)$$

где  $r$  – коэффициент корреляции между рядом исследуемого показателя и натуральным рядом чисел  $1, 2, \dots, n$ . Второе слагаемое в (7.4) представляет собой долю дисперсии, обусловленную трендом. Естественно полагать, что  $\sigma_0^2 = r^2 \sigma_x^2$ , и тогда получим, что минимальная целесообразная длина ряда определяется соотношением:

$$n_0 \leq \frac{1}{r^2}. \quad (7.5)$$

Из (7.3) следует, что минимальная длина ряда  $n_0$  должна уменьшаться с ростом тренда независимо от его знака.

С помощью (7.5) определим минимальное значение  $r$  для рекомендуемого в настоящее время 30-летнего осреднения метеорологических

показателей  $r = \sqrt{\frac{1}{30}} = 0,18$ . Таким образом, уже начиная с  $r \geq 0,18$ , тренд представляется важнейшим фактором для выбора рационального периода осреднения метеорологических рядов. Оптимальная длина ряда должна уменьшаться с ростом  $r^2$ .

Достаточно сложная статистическая структура временных метеорологических рядов еще более усложняется в условиях современного «взрывного» потепления. Вопрос о выборе периодов осреднения обсуждается в научной литературе длительное время, однако четко установленных критериев, которыми следует при этом руководствоваться, не выработано. Ясно, что выбор тех или иных критериев оптимальности должен выполняться на основании анализа статистической структуры рядов метеорологических показателей. Один из способов выбора оптимального периода осреднения рядов, содержащих периодические составляющие, предложенный Е.П. Борисенковым, представлен в учебнике (Дроздов О.А., 1989). Не излагая сущности этого подхода, приведем лишь некоторые следствия практического характера. Численные эксперименты показали, что при наличии в исходном ряде периодичностей 3, 5 и 20 лет оптимальный период осреднения должен составлять 60 лет. Однако в практических целях можно воспользоваться периодом осреднения 20 лет. Тогда полностью исключаются гармоники с периодом 5 и 20 лет, а вклад высокочастотной гармоники с периодом в 3 года сводится к минимуму. В этом случае рекомендуемый 30-летний период осреднения оказывается менее предпочтительным, чем 20-летний.

Помимо рассмотренных, известен еще один подход к вопросу об оптимальной длительности периода осреднения. Ряд авторов предлагают использовать в качестве критерия ошибку экстраполяции среднего значения за предыдущий период на следующие несколько лет. Подобная постановка задачи приводила к тому, что оптимальным периодом осреднения для температуры и осадков оказывался чаще всего период 15–20 лет. Этот подход представляется достаточно конструктивным для современных условий.

Приведем пример реализации этого подхода для рядов урожайности зерновых культур, рассчитанных на основании среднемесячных значений температуры и осадков с помощью модели «погода–урожай». Ошибки прогнозирования на следующий год по среднему значению урожайности за  $n$  предшествующих лет приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

**Среднеквадратические ошибки экстраполяции урожайности**

Регион	<i>n</i> – период осреднения, лет					
	3	5	10	15	20	30
Ставропольский край ( $r = 0,39$ )	4,67	4,30	4,90	5,11	5,21	5,33
Кировская область ( $r = -0,01$ )	2,44	2,30	2,01	2,01	1,99	1,95

Ошибки определялись по данным за период с 1980 по 1999 год. Для Ставропольского края при явно выраженном тренде ряда урожайности ( $r = 0,39$ ) оптимальным оказался период осреднения, равный пяти годам. Для Кировской области при отсутствии тренда ( $r = -0,01$ ) ошибка экстраполяции по среднему значению за предшествующие годы уменьшается с увеличением  $n$ , но, начиная с  $n = 10$ , это уменьшение становится пренебрежимо малым, и поэтому десятилетний период осреднения можно считать достаточным в этом случае.

Представленные результаты расчетов показывают, что выбор оптимального периода осреднения того или иного агроклиматического показателя в значительной степени зависит от скорости его изменения – величины тренда.

Рассмотренный «прогностический» подход к выбору оптимального периода осреднения имеет четкую практическую направленность и может быть рекомендован для использования. Однако это не означает, что подобный прогноз на следующий год по среднему значению за  $n$  предшествующих лет является наилучшим. Существуют методы, применение которых может еще более уменьшить ошибки экстраполяции рядов агроклиматических показателей по сравнению с рассмотренным подходом.

Статистический анализ многолетних рядов агроклиматических показателей для выявления локальных проявлений глобальных процессов изменения климата может быть сведен к следующим действиям:

1. Оценке средних скоростей изменения (трендов) агроклиматических показателей. Для получения оценок линейных трендов строятся уравнения регрессии вида:

$$\hat{y} = a_T z + a_0, \quad (7.6)$$

где  $\hat{y}$  – агроклиматический показатель;  $z = 1, 2, \dots, k$ ;  $k$  – переменная, характеризующая время;  $a_T$  – показатель тренда;  $a_0 = \hat{y}$  при  $z = 0$ .

Величина  $a_T$  связана с коэффициентом корреляции между величинами  $y$  и  $z$  следующим соотношением:

$$r_{yz} = a_T \frac{\sigma_z}{\sigma_y}. \quad (7.7)$$

Коэффициент корреляции  $r_{yz}$  характеризует степень выраженности линейных изменений климата за рассматриваемый  $k$ -летний период, знак

$r_{yz}$  – направленность этих изменений;  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$  – средние квадратические значения соответствующих переменных.

2. Расчету и построению графиков скользящих оценок средних величин и стандартных отклонений агроклиматических показателей, а также их робастных аналогов – медиан и абсолютных медианных отклонений для нескольких периодов осреднения.

3. Построению E-V- и M-АМО-диаграмм для рядов рассчитанных скользящих оценок.

4. Расчету скользящих оценок интеграла вероятности нормального распределения на основании

$$F(y_k, \bar{y}, \sigma_y) = \int_{-\infty}^{y_k} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y_k - y}{2\sigma_y}\right] dy, \quad (7.8)$$

где  $F(y_k, \bar{y}, \sigma_y)$  – обеспеченность заданного уровня  $y_k$  агроклиматического показателя  $y$ .

## 7.2. Модели и методы мониторинга изменений климата

Климат для решения агрометеорологических задач может рассматриваться как стохастический процесс, компоненты которого – температура, влажность воздуха, атмосферные осадки, солнечная радиация, скорость ветра, а также температура и влажность почвы – совместно определяют состояние и продуктивность экосистем, а через них влияют на технологические процессы и эффективность хозяйственной деятельности в целом. Связи между климатом, экосистемами и результатами хозяйственной деятельности, как правило, многомерны, не линейны и не аддитивны, им свойственны инерционность и адаптивность. Все это делает проблему экономической и экологической интерпретации наблюдаемых изменений климата достаточно сложной и в определенной мере неоднозначной.

В табл. 7.2 представлен перечень агроклиматических и биоклиматических показателей для комплексной оценки влияния изменений климата на сельское хозяйство. Предлагаемые показатели делятся на четыре группы – характеристики теплообеспеченности, влагообеспеченности, биоклиматического потенциала и климатообусловленной урожайности.

Характеристики термического режима включают: суммы активных температур за период с температурой выше 10 и 5 °С, продолжительность основного периода вегетации (число дней с температурой выше 10 или 5 °С), даты перехода температуры через кардинальные пределы – 5 и 10 °С. В состав показателей для мониторинга изменений климата включены средняя температура самого холодного месяца (января) как интегральный показатель условий зимовки и средняя температура наиболее теплого месяца (июля) как показатель напряженности термического режима.

Перечень основных показателей для мониторинга климата включает характеристики его континентальности. В качестве показателя континентальности обычно используется годовая амплитуда температуры воздуха, выраженная в процентах от средней для данной широты температуры. Для оценки степени континентальности может быть использован и ряд других показателей: для умеренного пояса продолжительность вегетационной весны (5–15 °С) и вегетационной осени (15–5 °С), а также общая их продолжительность (т.е. сумма  $N_{5-15}$  и  $N_{15-5}$ ). Чем континентальнее климат, тем больше годовая амплитуда температуры (АТ), тем быстрее нарастание температуры весной и падение ее осенью и тем короче вегетационная весна и осень.

Таблица 7.2

**Перечень основных агроклиматических и биоклиматических показателей для мониторинга изменений климата для сельского хозяйства**

Показатель, размерность	Обозначение	Способ расчета
<b>Характеристики термического режима</b>		
Сумма температур за период с температурой выше 5 и 10 °С	$\Sigma T_5, \Sigma T_{10}$	–
Продолжительность вегетационного периода, сутки	$N_5, N_{10}$	–
Даты перехода температуры через 5 и 10 °С весной и осенью	$d_5^0, d_{10}^0$	–
Средняя температура января и июля, °С	$T_1, T_7$	–
Амплитуда годового хода температуры, °С	$A_T$	–
Продолжительность вегетационной весны и осени, сутки	$N_{5-15}, N_{15-5}$	–
<b>Характеристики увлажнения</b>		
Сумма осадков за период с температурой выше 5 и 10 °С, мм	$R_5, R_{10}$	–
Суммарное испарение за вегетационный период, мм	$E$	*
Испаряемость за вегетационный период, мм	$E_0$	–
Влагозапасы почвы в слое 0–20 и 0–100 см за теплый период года, мм	$W_{20}, W_{100}$	*
Гидротермический коэффициент Селянинова	ГТК	–
Индекс сухости Будыко	ИС	–
Коэффициент увлажнения Чиркова	КУ	–
Дефицит испарения Будаговского, мм	$\Delta E$	*
<b>Биоклиматический потенциал (БКП), т·га<sup>-1</sup></b>		
БКП при низкозатратном земледелии	$BKP_0$	*
БКП при оптимальном увлажнении	$BKP_W$	*
БКП при оптимальном минеральном питании	$BKP_N$	*
БКП при оптимальном увлажнении и минеральном питании	$BKP_{WN}$	*
<b>Климатообусловленная урожайность (КУ), т·га<sup>-1</sup></b>		
КУ при низкозатратном земледелии	$Y_0$	*
КУ при оптимальном увлажнении	$Y_W$	*
КУ при оптимальном минеральном питании	$Y_N$	*
КУ при оптимальном увлажнении и минеральном питании	$Y_{WN}$	*

Примечание. \* – показатель определяется с помощью системы «климат–почва–урожай»

Все указанные в табл. 7.2 характеристики термического режима определяются на основании среднемесячных значений температуры воздуха по единому алгоритму, включающему следующие операции:

1. Аппроксимацию кривых годового хода метеорологических показателей тригонометрическими полиномами вида:

$$\varphi_S = A_0 \sum_{k=1}^n \left[ A_k \cos \left( \frac{2\pi k}{365} S \right) + B_k \sin \left( \frac{2\pi k}{365} S \right) \right], \quad (7.9)$$

где  $S = 0, 1, 2, \dots, 364$  – порядковый номер суток;  $A_0, A_k, B_k$  – коэффициенты, определяемые на основании среднемесячных значений метеорологических показателей,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

2. Расчет суточных значений метеорологического показателя  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{364}$ .

3. Определение дат перехода  $\varphi$  через заданные пределы. Определение продолжительности этих периодов и сумм  $\varphi$  за эти временные интервалы.

По приведенному алгоритму кроме термических показателей находят также суммы осадков ( $R_{T>5^\circ}, R_{T>10^\circ}$ ) за периоды с температурой выше 5 и 10 °C соответственно.

Показатели увлажнения и сухости  $ГТК, ИС$  и  $КУ$ , указанные в табл. 7.2, рассчитываются по формулам:

$$ГТК = \frac{\sum r_{VI-VIII}}{0,1 \sum T_{VI-VIII}} \text{ или } ГТК = \frac{\sum r_{T>10^\circ}}{0,1 \sum T_{T>10^\circ}}, \quad (7.10)$$

$$ИС = \frac{0,18 \sum T_{T>10^\circ}}{r_{I-XII}}, \quad (7.11)$$

$$КУ = \frac{0,5 r_{X-III} + r_{IV-VIII}}{0,18 \sum T_{IV-VIII}}. \quad (7.12)$$

Здесь  $r$  – сумма осадков за указанные месяцы и  $\sum T$  – сумма активных температур за указанные месяцы или за период с температурой воздуха выше 10 °C.

При наличии минимального объема гидрометеорологической информации – среднемесячных значений температуры воздуха и сумм осадков –  $ГТК, ИС$  и  $КУ$  – легко определяются по формулам (7.10), (7.11) и (7.12). Показатели увлажнения  $ГТК$  и  $КУ$  представляют собой безразмерные величины, характеризующие величину отношения приходной части водного баланса – осадков – к максимально возможной величине его расходной части – испаряемости. Индекс сухости  $ИС$  Будыко характеризует обратную величину – отношение испаряемости к годовой сумме осадков. Испаряемость при расчете  $ИС$  определяется по сумме температур воздуха за период с температурой выше 10 °C, что представляется

возможным благодаря тесной связи сумм температур с энергетической характеристикой испаряемости – радиационным балансом.

Индекс сухости – интегральный годовой показатель увлажненности, характеризующий географическую зональность и продуктивность экосистем,  $KУ$  и  $ГТК$  – более специализированные показатели, характеризующие влагообеспеченность агроэкосистем. При этом  $KУ$  характеризует увлажненность почвы с учетом осадков холодного периода года, которые вводятся с коэффициентом 0,5, а  $ГТК$  – увлажненность летнего периода без учета влагозапасов почвы на начало периода.

Согласно А.И. Будаговскому, наилучшим критерием для оценки и, следовательно, для мониторинга засух является дефицит испарения  $\Delta E$ :

$$\Delta E = E_0 - E = \left(1 - \frac{W}{W_k}\right) E_0, \quad (7.13)$$

где  $E_0$  – испаряемость;  $E$  – испарение;  $W_k$  – критическая влажность почвы, начиная с которой дальнейшее повышение влажности не приводит к росту затрат воды на испарение и транспирацию. Из (7.13) следует, что напряженность засухи, которая характеризуется величиной  $\Delta E$ , пропорциональна произведению испаряемости на недостаток почвенной влаги –

$1 - \frac{W}{W_k}$ . Дефицит испарения равен нулю при  $E_0 = 0$  или при достаточном

увлажнении, когда  $W \rightarrow W_k$ . При иссушении почвы, когда  $W \rightarrow 0$ , дефицит почвенной влаги  $\Delta E \rightarrow E_0$ . Таким образом, ключевыми физическими величинами, произведение которых определяет степень засушливости того или иного периода (декады, месяца, года), являются испаряемость и недостаток почвенной влаги, характеризующий состояние почвы. Ценность  $\Delta E$  как интегрального показателя напряженности засух состоит в том, что этот показатель, характеризуя явления, приводящие к нарушению водного режима растений, тесно связан с их углекислотным режимом, фотосинтезом, дыханием и в конечном счете – с урожаем. Найдены тесные корреляционные связи между значениями  $\Delta E$  за вегетационный период и урожаями зерновых культур.

В настоящее время отсутствуют репрезентативные и достаточно однородные длиннорядные наблюдения за влажностью почвы, поэтому в системе мониторинга изменений климата используются рассчитанные по стандартным гидрометеорологическим наблюдениям временные ряды влагозапасов почвы с помощью системы «климат–почва–урожай».

Для оценки продуктивности климата и его изменений в качестве важнейшего показателя используется первичная биологическая продуктивность агроэкосистем или биоклиматический потенциал (БКП) (Гордеев А.В. и др., 2006, 2007, 2008).

Согласно предлагаемой методике значения первичной биологической продуктивности агроэкосистем рассчитываются для четырех вариантов интенсификации земледелия:

БКП<sub>0</sub> – для низкозатратного земледелия;

БКП<sub>W</sub> – для оптимального увлажнения;

БКП<sub>N</sub> – для оптимального минерального питания;

БКП<sub>WN</sub> – для оптимального увлажнения и питания.

Расчет значений биоклиматического потенциала – суммарной сухой массы, синтезируемой за теплый период года, начинается с даты перехода температуры воздуха через 5 °С весной и продолжается до достижения посевом стандартного состояния (листового индекса, равного 5). Затем посев «скашивается», после чего на следующие сутки рост продолжается вплоть до достижения очередного стандартного состояния или падения температуры воздуха ниже 5 °С осенью. Суммарный урожай сухой биомассы, полученный в результате имитации, представляет собой искомую оценку биоклиматического потенциала.

Рассмотрим пример расчета составляющих БКП для Брянской и Самарской областей, расположенных примерно на одних и тех же широтах, но контрастных по условиям увлажнения и уровню плодородия почвы, а также для Краснодарского края, почвенно-климатические условия которого принимаются за эталонные для всей территории бывшего СССР. Оценки биоклиматического потенциала, а также их приращения  $\Delta_W$ ,  $\Delta_N$  и  $\Delta_{WN}$  представлены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

**Оценки составляющих и возможных приращений биоклиматического потенциала за счет оптимизации водного режима и минерального питания (т·га<sup>-1</sup> год<sup>-1</sup> сухой биомассы)**

Регион	Оценки БКП				Приращения БКП		
	БКП <sub>0</sub>	БКП <sub>W</sub>	БКП <sub>N</sub>	БКП <sub>WN</sub>	$\Delta_W$	$\Delta_N$	$\Delta_{WN}$
Брянская область	5,9	6,0	14,2	14,4	0,1	8,3	8,5
Самарская область	5,4	8,7	9,9	14,5	3,3	4,5	9,1
Краснодарский край	10,8	15,9	12,4	18,1	5,1	1,6	7,3

Величина  $\Delta_W$  характеризует возможный рост БКП за счет водного режима посевов,  $\Delta_N$  – рост за счет оптимизации режима минерального питания, а  $\Delta_{WN}$  позволяет оценить эффективность оптимизации водного режима и минерального питания растений в комплексе.

Согласно данным табл. 7.3, территория Краснодарского края характеризуется более высокими значениями всех четырех составляющих БКП, что представляется вполне закономерным. Брянская и Самарская области при близких значениях БКП<sub>0</sub> и БКП<sub>WN</sub> существенно разнятся по величинам биоклиматического потенциала при оптимальном увлажнении и



оптимальном минеральном питании. Различная структура составляющих БКП этих областей свидетельствует о том, что продуктивность сельскохозяйственных культур на территории Брянской области лимитируется уровнем плодородия почв, а Самарской области – условиями увлажнения.

Предлагаемая система оценки биоклиматического потенциала не одним, а системой четырех показателей, соответствующих различным уровням интенсификации земледелия, расширяет возможности использования этой методики для решения задач землепользования.

Аналогичная система показателей предлагается и для оценки изменений климата для сельского хозяйства. Климатообусловленная урожайность определяется:

$Y_0$  – при фактическом увлажнении и минеральном питании;

$Y_W$  – при оптимальном увлажнении почвы;

$Y_N$  – при оптимальном минеральном питании растений;

$Y_{WN}$  – при оптимальном увлажнении и минеральном питании.

При этом  $Y_0$  соответствует современному низкокзатратному земледелию России, а  $Y_N$  – высокоинтенсивному сельскому хозяйству, характерному для многих стран Западной Европы. Примеры анализа климатообусловленной урожайности будут рассмотрены в следующем разделе.

### **Оценка изменений термических ресурсов**

Доступные растениям термические ресурсы, как и условия их перезимовки, определяются годовым ходом температуры воздуха. Глобальное потепление отнюдь не сводится к простому смещению вверх кривой годового хода среднесуточной температуры воздуха. Современные изменения климата сопровождаются трансформацией периодических (суточной и годовой) составляющих температуры воздуха, что может вызывать как положительные, так и отрицательные последствия для сельского хозяйства. Так, например, увеличение продолжительности возможного периода вегетации – безусловно, положительный фактор, но сокращение периода налива зерна и ускоренное созревание часто ведет к снижению урожая. Изменение суточного хода температуры в свою очередь может привести к изменению сроков наступления и повторяемости заморозков, смещению соотношений между фотосинтезом и дыханием растений и к другим последствиям.

В табл. 7.4 приведены скользящие средние термических показателей для 20-летних периодов, заканчивающихся в 1950, 1960, ..., 2000 и 2003 гг., которые определены на основании рядов среднемесячных значений температуры воздуха для четырех гидрометеорологических станций, расположенных на территории Ростовской области. За начало современной волны глобального потепления часто принимают 1970 год. С этого момента продолжительность периода с температурой выше 5 °C

на территории области выросла на 7–11 дней, а средняя температура января повысилась на 1,3–2,1 °С. Сумма температур выше 10° (с 1970 г.) практически не изменилась, так же как и средняя температура июля за этот период.

Таблица 7.4

**Динамика термического режима территории Ростовской области  
по скользящим двадцатилетиям**

Гидрометеорологическая станция	Год						
	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2003
Продолжительность периода с температурой выше 5 °С							
Чертково	199	197	<b>203</b>	205	205	210	<b>213</b>
Константиновский	215	211	<b>215</b>	220	219	222	<b>225</b>
Ремонтное	214	210	<b>215</b>	220	220	223	<b>226</b>
Таганрог	220	215	<b>221</b>	225	225	226	<b>228</b>
Сумма температур выше 10 °С							
Чертково	2941	2907	<b>2970</b>	2937	2937	2995	<b>2985</b>
Константиновский	3346	3342	<b>3401</b>	3346	3311	3377	<b>3380</b>
Ремонтное	3201	3253	<b>3409</b>	3396	3392	3442	<b>3435</b>
Таганрог	3410	3376	<b>3466</b>	3462	3447	3488	<b>3493</b>
Средняя температура января, °С							
Чертково	-9,1	-8,0	<b>-7,6</b>	-8,7	-7,3	-5,6	<b>-5,5</b>
Константиновский	-7,2	-6,0	<b>-5,3</b>	-6,8	-5,6	-3,8	<b>-3,7</b>
Ремонтное	-7,3	-6,2	<b>-5,3</b>	-6,9	-5,7	-3,5	<b>-3,5</b>
Таганрог	-5,8	-4,8	<b>-4,1</b>	-5,4	-4,2	-2,8	<b>-2,8</b>
Средняя температура июля, °С							
Чертково	22,0	21,5	<b>21,8</b>	21,3	21,0	21,5	<b>21,9</b>
Константиновский	23,6	23,3	<b>23,8</b>	23,1	22,6	23,2	<b>23,7</b>
Ремонтное	23,6	23,7	<b>24,2</b>	23,8	23,6	24,0	<b>24,2</b>
Таганрог	23,8	23,3	<b>23,7</b>	23,3	23,0	23,5	<b>23,8</b>

Наглядное представление о трансформации годового хода температуры воздуха за последние десятилетия дает рис. 7.3. За счет повышения температуры первых четырех месяцев года восходящая ветвь кривой смещается вверх, тогда как нисходящая ветвь кривой годового хода остается без изменений. В результате этого особенно сильно растет продолжительность периода с температурой выше 0 °С и в меньшей степени – продолжительность периодов с температурой выше 5 и 10 °С, а продолжительность периода с температурой выше 15 °С остается без изменений.

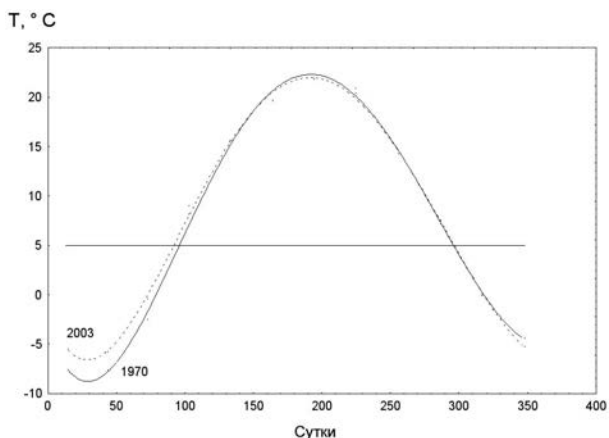


Рис. 7.3. Годовой ход средней температуры воздуха для 20-летних скользящих периодов, заканчивающихся в 1970 и 2003 гг.

Оценим более детально влияние наблюдаемых изменений климата на продолжительность вегетационного периода и условия перезимовки сельскохозяйственных культур на территории Ростовской области (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Оценки агроклиматических показателей по скользящим двадцатилетним периодам (по данным ГМС «Чертково», Ростовская область)

Конечный год периода	Продолжительность периода с температурой выше 5 °С			Повторяемость мягких зим		
	$m$	$\Sigma$	$p(\xi > 213)$	$M$	$\sigma$	$p(\xi > -5\text{ °С})$
1950	199	10,54	0,095	-9,1	4,42	0,177
1955	198	9,86	0,067	-8,6	4,66	0,218
1960	197	7,78	0,023	-8,0	4,52	0,216
1965	198	9,38	0,060	-7,6	4,08	0,261
1970	203	11,65	0,200	-7,6	3,39	0,223
<b>1975</b>	<b>204</b>	<b>11,55</b>	<b>0,240</b>	<b>-7,8</b>	<b>3,67</b>	<b>0,226</b>
1980	205	12,68	0,282	-8,7	3,54	0,148
1985	206	10,72	0,271	-7,8	3,86	0,230
1990	205	13,16	0,286	-7,3	4,15	0,290
1995	207	14,70	0,354	-6,2	3,52	0,371
2000	210	11,93	0,430	-5,6	3,24	0,429
<b>2003</b>	<b>213</b>	<b>12,47</b>	<b>0,500</b>	<b>-5,5</b>	<b>3,34</b>	<b>0,438</b>

Скользящие оценки агроклиматических показателей отнесены к последнему году соответствующего 20-летнего периода наблюдений.

Приведенные в табл. 7.5 скользящие значения средних ( $m$ ) и средних квадратических отклонений ( $\sigma$ ) полностью определяют положение и форму соответствующих скользящих кривых распределения в рамках предположения о нормальности закона распределения. Изменение  $m$  сдвигает кривую распределения: вправо – при росте  $m$ , влево – при падении  $m$ , а изменения среднего квадратического отклонения деформируют форму этой кривой – делают ее более плоской при росте  $\sigma$  и более островершинной при уменьшении  $\sigma$ . При этом могут возникать кажущиеся противоречия. Например, при росте средней температуры января вероятность вымерзания озимых культур может повыситься, если одновременно повысится изменчивость средней температуры этого месяца.

Оценим изменения повторяемости мягких зим. Следуя Шашко, мягкой зимой ( $p(\xi > -5^\circ\text{C})$ ) будем называть зиму, при которой средняя температура самого холодного месяца года не опускается ниже  $-5^\circ\text{C}$ . Из данных табл. 7.5 следует, что 20-летние средние температуры января устойчиво росли с  $-9,1^\circ\text{C}$  в 1950 г. до  $-5,5^\circ\text{C}$  в 2003 году. Это подтверждает хорошо известную закономерность – глобальное потепление в умеренных широтах проявляется прежде всего через повышение температуры холодного периода года. Отметим тенденцию к снижению междугодовой изменчивости январских температур, среднее квадратическое отклонение которых за рассматриваемый период снизилось с  $4,4$  до  $3,3^\circ\text{C}$ , т.е. не менее чем на  $1^\circ\text{C}$ . В результате изменения параметров кривой распределения ( $m$  и  $\sigma$ ) январских температур повторяемость мягких зим повысилась с  $18\%$  в 1950 г. до  $44\%$  в 2003 году. Рост повторяемости мягких зим в 2,5 раза с середины прошлого века по настоящее время, безусловно, оказывает существенное влияние на зерновое хозяйство Ростовской области, ведущая роль в котором принадлежит озимым культурам.

Оценим продолжительность изменения периода с температурой выше  $5^\circ\text{C}$ . За вторую половину XX столетия средняя продолжительность указанного периода увеличилась на две недели (с 199 до 213 дней). Этот рост не связан с повышением июльских температур. Увеличение продолжительности теплого периода года обусловлено, по-видимому, уменьшением степени континентальности климата, в результате чего кривая годового хода температуры воздуха стала более плоской и удлинился период между датами перехода температуры через  $5^\circ\text{C}$  весной и осенью. Анализ изменений обеспеченностей подтверждает вывод об устойчивом росте продолжительности периода вегетации сельскохозяйственных культур. Действительно, современная (равная в среднем 213 дням) продолжительность вегетационного периода в 50–60-е гг. наблюдалась менее одного раза за 10 лет –  $p(y_k > 213) = 0,09$ . В последние десятилетия показатель  $p(y_k > 213)$  рос особенно быстро и за период с 1975 по 2003 г. повысился в 2 раза – с 24 до  $50\%$ .

### Оценка изменений увлажненности

Для оценки изменений увлажненности территории Ростовской области, связанных с современными глобальными изменениями климата, в табл. 7.6 представлены скользящие средние величин гидротермического коэффициента (ГТК) и дефицита испарения ( $\Delta E$ ).

Помимо этого, для ГМС «Константиновский» построены E-V- и M-АМО-диаграммы, характеризующие динамику параметров функции распределения гидротермического коэффициента (рис. 7.2). Из этих данных следует, что с 1970 по 2003 г. средние значения ГТК существенно выросли (в среднем на 22 %). Значения дефицита испарения уменьшились – на 22 мм в среднем по территории области. Известно, что величины ГТК и  $\Delta E$  достаточно тесно коррелируют с урожайностью зерновых культур. Поэтому на основании полученных данных можно сделать вывод, что выявленная тенденция изменения показателей влагообеспеченности территории Ростовской области в целом благоприятствует повышению урожайности зерновых культур. Вместе с тем за последние десятилетия существенно повысилась изменчивость условий увлажнения, что не способствует стабильности сельского хозяйства и климатообусловленной урожайности.

Таблица 7.6

#### Динамика показателей увлажнения территории Ростовской области за вторую половину XX столетия по скользящим двадцатилетиям

Гидрометеорологическая станция	Конечный год периода осреднения						
	1950	1960	<b>1970</b>	1980	1990	2000	<b>2003</b>
Гидротермический коэффициент, ГТК							
Чертково	0,78	0,84	<b>0,79</b>	0,82	0,86	0,82	<b>0,89</b>
Константиновский	0,61	0,56	<b>0,58</b>	0,72	0,76	0,73	<b>0,76</b>
Ремонтное	0,66	0,57	<b>0,54</b>	0,65	0,72	0,65	<b>0,68</b>
Таганрог	0,67	0,69	<b>0,74</b>	0,78	0,82	0,89	<b>0,89</b>
Дефицит испарения, $\Delta E$ (мм)							
Чертково	579	567	<b>578</b>	572	570	584	<b>571</b>
Константиновский	631	634	<b>627</b>	604	599	609	<b>605</b>
Ремонтное	626	640	<b>649</b>	631	620	629	<b>619</b>
Таганрог	617	619	<b>604</b>	600	600	578	<b>575</b>

### Оценка изменений биоклиматического потенциала

Оценим изменения первичной биологической продуктивности (т/га · год сухой биомассы) территории Ростовской области, связанные с наблюдаемыми изменениями климата. Результаты расчетов, приведенные в табл. 7.7, показывают, что при низкозатратном земледелии средняя продуктивность 1 га сельскохозяйственных угодий на территории области варьирует в довольно широких пределах. Так, в 60–70 гг. среднее значение БКП, по данным ГМС «Ремонтное», составляло 33,7 т/га, тогда

как для ГМС «Чертково» эта величина равна 45,9 т/га, что на 38 % выше. Изменения биоклиматического потенциала по территории области хорошо согласуются с изменениями условий увлажнения. Действительно, для ГМС «Чертково»  $ГТК = 0,79$ , а  $\Delta E = 578$  мм, тогда как для ГМС «Ремонтное»  $ГТК = 0,54$  и  $\Delta E = 649$  мм.

С 1970 по 2003 г. скользящие двадцатилетние средние величины  $БКП_0$  повысились в среднем на 10 %. Самый значительный рост – на 12–17 % – отмечается для центральных и юго-восточных наиболее засушливых районов области.

Таблица 7.7

**Динамика составляющих биоклиматического потенциала (БКП) территории Ростовской области по скользящим двадцатилетиям ( $\Delta$  – приращение, в % скользящих 20-летних средних величин БКП с 1970 по 2003 г.)**

Гидрометеорологическая станция	Конечный год периода осреднения							Δ, %
	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2003	
При низкокзатратном земледелии – БКП <sub>0</sub> , т/га·год								
Чертково	45,5	46,5	45,9	48,8	49,8	47,8	48,1	105
Константиновский	38,2	35,1	35,6	41,5	43,7	41,7	41,6	117
Ремонтное	38,2	33,7	33,3	37,3	39,4	36,8	37,2	112
Таганрог	39,8	41,0	42,3	43,7	44,6	44,3	43,9	104
При орошении – БКП <sub>w</sub> , т/га·год								
Чертково	97,3	97,0	98,1	98,8	98,7	99,8	99,0	101
Константиновский	96,1	95,8	95,2	96,9	97,5	97,2	95,9	101
Ремонтное	95,6	94,0	94,2	95,9	96,1	95,7	95,3	101
Таганрог	96,1	96,9	96,3	97,7	97,5	96,0	95,2	99
При массированном применении удобрений – БКП <sub>N</sub> , т/га·год								
Чертково	78,9	81,6	82,0	86,2	89,3	86,9	88,3	108
Константиновский	65,6	59,3	61,1	74,9	80,4	77,3	77,2	126
Ремонтное	64,0	55,4	55,2	65,5	70,3	65,0	65,8	119
Таганрог	68,6	71,1	75,1	80,3	83,6	83,2	82,9	110

Продуктивность агроэкосистем при достаточном увлажнении (при орошении) характеризуется величинами  $БКП_w$ . Как следует из данных табл. 7.7, средние значения  $БКП_w$  с 1970 г. по настоящее время практически не изменились.

Наиболее значительный рост продуктивности земледелия, обусловленный современными изменениями климата территории Ростовской области, выявляется при высоком уровне применения удобрений (т.е. для величин  $БКП_N$ ). Так, из данных табл. 7.7 следует, что в этих условиях

первичная биологическая продуктивность 1 га пахотных земель повысилась в среднем от 8 % (ГМС «Чертково») до 26 % (ГМС «Константиновский»). Таким образом, данные табл. 7.7 позволяют заключить, что современные изменения климата на территории Ростовской области в целом способствуют росту продуктивности земледелия. Однако наиболее значительный процентный рост продуктивности отмечается для величин БКП<sub>н</sub>, которые характеризуют продуктивность агроэкосистем при высоком уровне химизации земледелия, который достигнут большинством стран Западной Европы. На продуктивность орошаемых земель (БКП<sub>о</sub>) современные изменения климата существенного влияния не оказали, хотя орошение, как следует из данных табл. 7.7, повышает биоклиматический потенциал территории Ростовской области не менее чем в 2 раза.

Сделанные выводы подтверждают также данные EV- и M-AMO-диаграмм временного ряда БКП<sub>н</sub> для 30-летних скользящих периодов (рис. 7.2). Рост биоклиматического потенциала на территории Ростовской области сопровождается существенным увеличением межгодовой изменчивости этого показателя. За 30 лет абсолютное медианное отклонение (AMO) возросло на 16 %, а стандартное отклонение (V) – на 24 %. Рост межгодовой изменчивости урожайности ведет к снижению устойчивости и, следовательно, эффективности сельскохозяйственного производства. Это одно из неблагоприятных последствий наблюдаемых изменений климата.

### **Технология мониторинга изменений климата для сельского хозяйства**

Цель мониторинга – регулярное слежение за изменениями системы «климат–сельское хозяйство». В силу большого разнообразия климатических, почвенных условий, набора используемых сельскохозяйственных культур и способов ведения сельскохозяйственного производства система отслеживаемых агроклиматических показателей должна отражать зональные особенности отдельных регионов России. Система использования оперативных и исторических баз данных и математических моделей для оценки последствий климатических изменений для сельского хозяйства представлена на рис. 7.4.

Основные причины снижения урожайности зерновых культур на территории Ростовской области – периодически повторяющиеся засухи и гибель или повреждение озимых культур в холодный период года. Этими обстоятельствами и определяется выбор системы агроклиматических показателей для мониторинга климатических условий Ростовской области.

Практически мониторинг реализуется путем расчета следующих ежегодно пополняемых и обновляемых матриц, которые представляются в виде таблиц:

- текущих годовых значений оцениваемых параметров;



Рис. 7.4. Схема обработки данных и технологии мониторинга последствий изменений климата для сельского хозяйства



- скользящих средних значений оцениваемых параметров;
- скользящих средних квадратических отклонений;
- скользящих оценок повторяемостей, обеспеченностей или рисков.

Приведем в качестве примера сводки результатов мониторинга, рассчитанные по данным одной ГМС для теплого периода года в табл. 7.8, 7.9, 7.10 и 7.11 соответственно.

Данные, представленные в этих таблицах, позволяют решать следующие практические задачи гидрометеорологического обеспечения сельского хозяйства:

- оценивать агрометеорологические условия текущего года, по сравнению с прошлым годом и климатической предысторией прошедшего 30-летнего периода;
- определять годы, аналогичные текущему по агрометеорологическим условиям всего вегетационного периода или его отдельных подпериодов;
- находить наблюдаемые границы изменчивости оцениваемых агроклиматических показателей по данным за последние 30 лет.

Скользящие средние значения агроклиматических параметров (табл. 7.9) представляются наиболее важными в системе мониторинга климата. Так, например, из данных табл. 7.9 следует вполне однозначный вывод – наблюдаемые за последние 30 лет изменения климата способствовали росту продуктивности сельского хозяйства северных районов Ростовской области.

Данные, приведенные в табл. 7.9, позволяют заключить, что степень аридности климата с 70-х гг. (с момента начала «взрывного» глобального потепления) существенно уменьшилась. Так, 30-летние средние величины дефицита испарения уменьшились с 578 мм в 1970 г. до 561 мм в 2004 году. Значения ГТК, характеризующего отношение суммы осадков к сумме температур, увеличились с 0,78 до 0,90. Средние значения продуктивных влагозапасов в пахотном и метровом слоях почвы в июне и июле также повысились, хотя это повышение нельзя оценить как значительное.

Экономические и экологические последствия засух оцениваются величинами урожайности и биоклиматического потенциала для двух уровней интенсификации земледелия ( $Y_0$ ,  $Y_N$  и  $БКП_0$ ,  $БКП_N$ ). Динамика всех четырех названных показателей свидетельствует о положительном влиянии наблюдаемых изменений климата на продуктивность сельского хозяйства и биоклиматический потенциал территории. Средние значения биоклиматического потенциала для современного и интенсивного земледелия повысились на 9,6 и 11,2 % соответственно. Наиболее экономически важный показатель – средняя урожайность зерновых культур, обусловленная климатом, повысилась на 13,9 % для современного уровня земледелия и на 24,4 % – для высокоинтенсивного сельского хозяйства. Этот результат, показывающий, что влияние наблюдаемых изменений климата почти в

2 раза эффективнее для интенсивного земледелия, чем для экстенсивного, представляется достаточно важным.

Тем не менее анализ скользящих средних недостаточен для однозначной интерпретации результатов расчетов. Изменения средних величин свидетельствуют лишь о смещении положения центра распределения, но в связи с глобальным потеплением изменяются и формы функций распределения гидрометеорологических величин.

Таблица 7.8

**Текущие значения параметров агроклиматического мониторинга  
(на примере ГМС «Чертково» Ростовской области)**

Конечный год периода	Биоклиматический потенциал, ц/га		Климатообусловленная урожайность, ц/га		$\Delta E$ , мм	ГТК	Влагозапасы почвы, мм	
	БКП <sub>0</sub>	БКП <sub>N</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>N</sub>			июнь	июль
							W <sub>100</sub>	W <sub>100</sub>
1970	43,3	74,5	11,8	19,7	578	0,63	44,0	28,0
1971	40,9	68,6	9,4	14,6	605	0,65	54,0	27,0
1972	31,2	52,3	5,1	7,6	651	0,52	37,0	34,0
1973	61,0	114,0	13,6	29,9	570	1,17	39,0	31,0
1974	53,8	104,5	15,2	25,5	526	0,85	78,0	47,0
1975	36,8	62,1	4,1	6,4	669	0,42	42,0	50,0
1976	73,4	126,1	18,0	35,5	430	1,48	48,0	36,0
1977	76,0	132,4	17,1	36,7	373	1,68	112,0	55,0
1978	55,4	99,2	19,0	38,0	527	0,93	75,0	42,0
1979	38,3	63,1	8,2	10,7	633	0,42	61,0	48,0
1980	61,1	108,3	12,4	20,4	444	1,42	71,0	30,0
1981	46,5	81,2	7,4	10,4	593	0,66	68,0	56,0
1982	59,4	102,9	17,1	33,0	544	0,81	66,0	46,0
1983	38,8	74,6	8,6	13,5	694	0,42	37,0	33,0
1984	40,3	66,6	4,8	6,6	690	0,53	41,0	45,0
1985	52,5	97,1	15,9	29,3	494	1,26	59,0	33,0
1986	35,3	67,6	7,3	12,6	698	0,37	47,0	38,0
1987	50,0	86,7	11,5	17,2	539	0,92	68,0	33,0
1988	40,7	73,8	7,4	9,7	594	0,75	46,0	35,0
1989	49,9	92,6	12,8	24,2	561	0,91	51,0	32,0
1990	54,1	112,7	16,5	36,9	571	0,94	50,0	28,0
1991	47,3	82,3	7,5	10,0	596	0,80	50,0	41,0
1992	50,4	90,2	12,9	22,6	533	0,96	46,0	32,0
1993	66,7	122,0	17,7	33,1	486	1,29	68,0	40,0
1994	49,4	88,2	12,6	22,0	592	0,66	57,0	34,0
1995	45,1	87,4	8,7	16,2	585	0,87	35,0	27,0
1996	34,9	60,1	7,7	10,4	552	0,74	54,0	37,0
1997	58,5	104,1	13,1	22,6	515	1,23	52,0	40,0
1998	41,7	71,3	8,7	14,2	625	0,54	52,0	35,0
1999	39,0	68,0	5,9	9,6	632	0,66	35,0	38,0
2000	55,9	108,1	12,4	26,7	591	1,01	45,0	39,0
2001	50,1	99,1	15,8	34,5	426	1,41	63,0	30,0
2002	41,9	74,8	8,3	14,0	604	0,69	60,0	43,0
2003	58,5	107,9	16,5	33,0	529	1,17	73,0	55,0
2004	61,1	114,9	16,4	34,5	511	1,14	62,0	48,0

Таблица 7.9

**Скользющие 30-летние средние показателей агроклиматического мониторинга  
(на примере ГМС «Чертково» Ростовской области)**

Конечный год периода	Биоклиматический потенциал, ц/га		Климатообусловленная урожайность, ц/га		ΔE, мм	ГТК	Влагозапасы почвы, мм	
	БКП <sub>0</sub>	БКП <sub>N</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>N</sub>			июнь	июль
							W <sub>100</sub>	W <sub>100</sub>
1970	45,9	80,8	10,3	17,2	578	0,78	54,8	36,7
1971	44,9	79,1	10,1	16,8	585	0,75	53,8	36,2
1972	44,4	78,2	9,9	16,4	587	0,75	52,2	35,6
1973	45,0	79,5	10,0	17,0	585	0,76	52,3	35,5
1974	45,6	81,0	10,3	17,6	581	0,77	53,6	36,1
1975	44,8	79,5	10,0	17,1	588	0,74	53,0	36,7
1976	46,1	81,9	10,5	18,1	582	0,78	52,6	36,1
1977	47,3	84,0	10,9	19,1	575	0,81	55,0	36,9
1978	47,8	85,2	11,3	20,1	572	0,82	55,8	36,8
1979	47,7	84,9	11,2	19,7	572	0,82	55,8	37,2
1980	48,2	85,7	11,2	19,6	566	0,84	56,9	37,4
1981	48,3	85,4	11,2	19,6	567	0,83	58,1	38,0
1982	48,5	85,3	11,3	19,8	567	0,82	58,3	38,3
1983	48,2	85,3	11,2	19,7	572	0,81	57,4	37,9
1984	48,5	85,9	11,2	19,7	575	0,81	57,3	38,4
1985	48,8	86,8	11,3	20,1	572	0,83	57,7	38,8
1986	48,2	85,6	11,2	19,8	577	0,81	57,1	38,6
1987	48,6	86,3	11,3	20,1	574	0,82	57,9	38,4
1988	47,7	84,9	11,0	19,3	580	0,79	57,0	38,1
1989	47,8	84,9	11,1	19,6	580	0,79	56,7	37,5
1990	48,0	85,9	11,5	20,6	580	0,80	56,6	36,9
1991	47,9	85,8	11,2	20,1	583	0,79	55,7	37,1
1992	48,0	85,8	11,2	20,0	579	0,80	56,0	37,2
1993	49,0	87,8	11,6	20,8	575	0,83	56,4	37,4
1994	48,9	87,5	11,6	20,8	577	0,81	56,3	37,2
1995	49,1	88,2	11,5	20,8	576	0,83	55,4	37,3
1996	48,7	87,2	11,3	20,0	575	0,83	55,5	37,6
1997	49,4	88,5	11,4	20,2	569	0,86	55,4	37,8
1998	49,5	88,8	11,5	20,4	568	0,86	55,6	37,6
1999	49,0	87,8	11,2	19,9	570	0,85	54,7	37,7
2000	49,4	88,9	11,2	20,2	570	0,86	54,8	38,0
2001	49,7	89,9	11,5	20,8	564	0,89	55,1	38,1
2002	50,1	90,7	11,6	21,0	562	0,89	55,8	38,4
2003	50,0	90,5	11,7	21,1	561	0,89	57,0	39,2
2004	50,3	90,8	11,7	21,4	561	0,90	56,4	39,3

*Примечание.* В строке 1990 г. представлены действующие в настоящее время климатические нормы (1961 – 1990 гг.).

Таблица 7.10

**Скользящие 30-летние средние квадратические отклонения параметров  
агроклиматического мониторинга (на примере ГМС «Чертково»  
Ростовской области)**

Конечный год периода	Биоклиматический потенциал, ц/га		Климатообусловленная урожайность, ц/га		$\Delta E$ , мм	ГТК	Влагозапасы почвы, мм	
							июнь	июль
	БКП <sub>0</sub>	БКП <sub>N</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>N</sub>			W <sub>100</sub>	W <sub>100</sub>
1970	8,9	18,5	3,6	8,2	64	0,34	13,7	8,1
1971	7,8	17,1	3,5	8,0	55	0,28	12,5	8,2
1972	8,2	17,8	3,6	8,2	56	0,29	11,4	7,8
1973	8,7	18,9	3,7	8,5	56	0,30	11,3	7,8
1974	8,7	19,0	3,7	8,5	55	0,29	12,0	8,0
1975	8,4	18,5	3,9	8,7	52	0,27	12,1	8,3
1976	9,7	19,7	3,9	9,0	59	0,30	12,1	7,6
1977	11,0	21,6	4,0	9,3	70	0,34	16,0	8,3
1978	11,0	21,3	4,1	9,7	70	0,34	16,4	8,2
1979	11,1	21,6	4,2	9,8	70	0,34	16,4	8,5
1980	11,3	22,1	4,2	9,8	73	0,36	16,2	8,3
1981	11,3	22,1	4,1	9,8	73	0,36	15,7	8,9
1982	11,4	22,0	4,2	10,0	73	0,36	15,7	9,0
1983	11,5	21,9	4,3	10,1	77	0,36	16,1	9,1
1984	11,2	21,2	4,3	10,1	80	0,36	16,2	9,0
1985	11,2	21,0	4,4	10,2	81	0,37	16,1	8,6
1986	11,4	21,2	4,4	10,3	84	0,38	16,1	8,5
1987	11,3	20,8	4,4	10,2	84	0,38	16,0	8,6
1988	10,9	20,1	4,3	10,0	79	0,35	15,8	8,5
1989	10,9	20,2	4,2	10,0	79	0,35	15,9	8,3
<b>1990</b>	<b>10,9</b>	<b>20,8</b>	<b>4,2</b>	<b>10,1</b>	<b>79</b>	<b>0,35</b>	<b>15,9</b>	<b>8,4</b>
1991	10,9	20,8	4,2	10,2	78	0,35	15,6	8,4
1992	10,9	20,8	4,2	10,2	78	0,35	15,3	8,3
1993	11,2	21,3	4,3	10,3	80	0,35	15,5	8,3
1994	11,1	21,2	4,3	10,3	79	0,35	15,5	8,3
1995	11,0	20,8	4,3	10,3	79	0,34	15,9	8,2
1996	11,2	21,4	4,3	10,2	79	0,34	15,9	7,9
1997	11,2	21,2	4,3	10,2	78	0,34	15,9	7,9
1998	11,1	21,0	4,3	10,0	76	0,34	15,8	7,9
1999	11,3	21,3	4,4	10,1	77	0,34	16,2	7,9
2000	11,3	21,4	4,4	10,2	77	0,34	16,2	7,7
2001	11,2	21,2	4,4	10,5	81	0,35	16,3	7,6
2002	10,7	20,2	4,3	10,3	80	0,35	15,9	7,6
2003	10,7	19,9	4,4	10,4	80	0,35	15,9	8,0
<b>2004</b>	<b>10,8</b>	<b>20,3</b>	<b>4,4</b>	<b>10,6</b>	<b>80</b>	<b>0,35</b>	<b>15,4</b>	<b>8,1</b>

Таблица 7.11

Скользящие 30-летние оценки обеспеченности  $F = \int_{-\infty}^{y_k} p(x)dx$  заданных значений ( $y_k$ ) показателей агроклиматического мониторинга

Конечный год периода	Биоклиматический потенциал, ц/га		Климатообусловленная урожайность, ц/га		$\Delta E$ , мм	ГТК	Влагозапасы почвы, мм	
	БКП <sub>0</sub>	БКП <sub>N</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>N</sub>			июнь	июль
							W <sub>100</sub>	W <sub>100</sub>
1970	0,689	0,705	0,650	0,695	0,396	0,634	0,547	0,622
1971	0,750	0,753	0,676	0,719	0,332	0,705	0,582	0,647
1972	0,760	0,760	0,692	0,729	0,321	0,705	0,643	0,679
1973	0,724	0,725	0,675	0,699	0,330	0,684	0,642	0,683
1974	0,703	0,696	0,643	0,675	0,357	0,670	0,593	0,653
1975	0,742	0,729	0,666	0,692	0,298	0,719	0,613	0,619
1976	0,667	0,674	0,618	0,644	0,358	0,661	0,623	0,661
1977	0,605	0,623	0,579	0,599	0,418	0,608	0,536	0,613
1978	0,587	0,603	0,536	0,555	0,437	0,594	0,516	0,617
1979	0,591	0,608	0,548	0,570	0,437	0,597	0,515	0,594
1980	0,572	0,592	0,550	0,574	0,470	0,563	0,488	0,589
1981	0,568	0,597	0,548	0,574	0,466	0,576	0,457	0,555
1982	0,562	0,599	0,541	0,565	0,463	0,584	0,453	0,544
1983	0,569	0,599	0,545	0,568	0,442	0,594	0,477	0,558
1984	0,561	0,592	0,548	0,568	0,427	0,596	0,479	0,538
1985	0,551	0,576	0,531	0,553	0,443	0,573	0,468	0,523
1986	0,572	0,596	0,547	0,562	0,423	0,592	0,484	0,529
1987	0,560	0,585	0,535	0,553	0,435	0,584	0,464	0,538
1988	0,592	0,615	0,568	0,586	0,404	0,622	0,486	0,556
1989	0,589	0,614	0,556	0,571	0,401	0,624	0,494	0,586
1990	0,580	0,592	0,522	0,531	0,403	0,617	0,497	0,609
1991	0,585	0,594	0,543	0,553	0,388	0,625	0,518	0,601
1992	0,582	0,595	0,542	0,555	0,405	0,615	0,512	0,597
1993	0,543	0,556	0,509	0,525	0,426	0,584	0,502	0,587
1994	0,550	0,562	0,511	0,526	0,418	0,598	0,504	0,597
1995	0,543	0,549	0,514	0,525	0,421	0,584	0,527	0,595
1996	0,553	0,566	0,537	0,554	0,430	0,584	0,523	0,581
1997	0,531	0,543	0,528	0,547	0,455	0,551	0,527	0,573
1998	0,528	0,539	0,521	0,540	0,462	0,550	0,522	0,583
1999	0,544	0,557	0,543	0,559	0,454	0,559	0,542	0,580
2000	0,529	0,535	0,541	0,550	0,452	0,544	0,541	0,563
2001	0,518	0,517	0,521	0,523	0,483	0,514	0,533	0,559
2002	0,506	0,503	0,512	0,515	0,491	0,508	0,515	0,543
2003	0,509	0,507	0,503	0,511	0,498	0,508	0,487	0,502
2004	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
y <sub>k</sub>	50,3	90,8	11,7	21,4	561	0,90	56,4	39,3

Данные табл. 7.10 подтверждают это предположение – с 1970 по 2004 год повысилась изменчивость всех представленных в таблице показателей, за исключением ГТК и июльских влагозапасов метрового слоя почвы. Особенно значителен рост дисперсии дефицита испарения – среднеквадратическое отклонение этого показателя повысилось с 65 до 81 мм. Климатообусловленная изменчивость урожаев зерновых культур с 1970 по 2004 г. увеличилась на 21 % для малозатратного и на 28 % для высокоинтенсивного земледелия. Повышение междугодовой изменчивости урожаев следует отнести к негативным экономическим последствиям наблюдаемых изменений климата.

В табл. 7.11 представлены скользящие 30-летние оценки повторяемости текущего состояния рассматриваемой системы показателей. При их расчете значения  $y_k$  приняты равными текущим значениям средних за период, закончившийся в 2004 году. В результате задания этого условия оценки повторяемости в последней строке табл. 7.11 равны 0,5. Эти оценки интерпретируются следующим образом: например, если повторяемость урожаев зерновых ниже 21,4 ц/га (высокой уровень агротехники) составляла 70 % в 1970 г., то к 2004 г. она снизилась на 20 % до 50 %.

Анализ всей совокупности данных, представленных в табл. 7.11, показывает, что они согласованно свидетельствуют об уменьшении степени аридности климата за период с 1970 по 2004 г. включительно. Снижение степени аридности климата ведет к заметному росту урожайности зерновых культур и биоклиматического потенциала сельскохозяйственных угодий. Вместе с тем наблюдаемое увеличение климатической изменчивости урожайности уменьшает стабильность сельскохозяйственного производства.

Рассмотрим на конкретном примере схему агроклиматического мониторинга для холодного периода года. Эта схема мониторинга реализуется путем расчета следующих четырех таблиц (табл. 7.12–7.15), последняя строка которых ежегодно обновляется. В табл. 7.12 представляются текущие значения параметров мониторинга. В табл. 7.13 и табл. 7.14 приводятся оценки текущих скользящих средних и дисперсий анализируемых временных рядов. И, наконец, в последней таблице – 7.15 – представляются скользящие вероятностные характеристики (обеспеченности) текущего состояния оцениваемой системы параметров. Для этого в стандартном случае используется интегральная функция нормального распределения, с помощью которой определяется степень аномальности каждого агрометеорологического показателя за последний период, по сравнению с заданной величиной.

В приведенных здесь таблицах представлены оценки, полученные по 30-летним скользящим отрезкам анализируемых временных рядов. Тридцатилетний период осреднения, как известно, признан предпочтительным для оценки климатических норм в соответствии с рекомендациями ВМО.

В выделенной шрифтом строке 1990 г. представлены действующие в настоящее время климатические нормы за 1961 – 1990 гг.

Таблица 7.12

**Текущие оценки показателей системы мониторинга агрометеорологических условий холодного периода года для сельского хозяйства  
(по данным наблюдений ГМС «Чертково», Ростовская область)**

Год	Температура января, °С	Число дней от 1.01 до даты перехода температуры воздуха через 5 °С		Число дней от 1.01 до даты оптимальных сроков сева озимых	Влагозапасы (мм) метрового слоя почвы		Сумма отрицательных температур воздуха за зиму, °С
		весной	осенью		весной	осенью (28.09)	
<b>1975</b>	<b>-3,3</b>	<b>83</b>	<b>289</b>	<b>248</b>	<b>154</b>	<b>46</b>	<b>-517</b>
1976	-7,9	93	278	238	116	19	-897
1977	-12,8	91	284	237	200	35	-743
1978	-7,8	80	304	244	185	42	-660
1979	-8,2	100	289	246	174	44	-497
1980	-11,5	101	292	244	124	34	-792
1981	-3,7	104	303	254	173	28	-264
1982	-5,4	95	294	248	172	24	-552
1983	-3,9	88	298	252	153	28	-301
1984	-2,6	93	304	252	131	19	-737
1985	-7,4	99	297	243	137	58	-941
1986	-2,8	85	296	245	170	48	-746
1987	-14,1	111	290	239	142	39	-1114
1988	-8,6	93	292	247	148	53	-795
1989	-3	83	300	250	149	44	-200
<b>1990</b>	<b>-4,3</b>	<b>77</b>	<b>312</b>	<b>248</b>	<b>152</b>	<b>49</b>	<b>-232</b>
1991	-4,2	92	307	256	168	35	-660
1992	-3,8	85	302	243	133	47	-454
1993	-4,3	99	292	239	154	27	-604
1994	-1,7	90	305	259	166	41	-797
1995	-5,2	83	305	250	142	46	-332
1996	-12	102	316	242	161	89	-893
1997	-8,8	99	303	240	139	28	-677
1998	-6,4	90	298	253	167	34	-618
1999	-2,8	83	297	253	135	29	-234
2000	-6,6	87	297	246	140	29	-294
2001	-1,2	84	309	246	159	75	-450
2002	-5,2	85	308	250	188	72	-476
2003	-5,5	102	304	247	141	15	-640
<b>2004</b>	<b>-2,2</b>	<b>80</b>	<b>305</b>	<b>250</b>	<b>181</b>	<b>62</b>	<b>-209</b>

Таблица 7.13

**Скользющие 30-летние средние текущих оценок показателей  
системы мониторинга климатических условий холодного периода года  
для сельского хозяйства (по данным ГМС «Чертково», Ростовская область)**

Конеч- ный год периода	Темпера- тура января, °С	Число дней от 1.01 до даты перехода температуры воздуха через 5 °С		Число дней от 1.01 до даты оптимальных сроков сева озимых	Влагозапасы (мм) метрового слоя почвы		Сумма отрицательных температур воздуха за зиму, °С
		весной	осенью		весной	осенью (28.09)	
<b>1975</b>	<b>-7,9</b>	<b>96,7</b>	<b>296,7</b>	<b>247,5</b>	<b>148,0</b>	<b>37,3</b>	<b>-682</b>
1976	-8,0	96,5	296,7	247,3	146,1	36,3	-691
1977	-8,0	96,4	296,6	247,2	148,5	35,6	-694
1978	-8,2	95,6	296,8	247,2	149,6	35,9	-696
1979	-8,2	95,6	296,6	247,3	150,7	36,6	-690
1980	-8,1	95,9	296,6	247,1	150,5	36,9	-688
1981	-7,9	96,6	297,3	247,4	151,5	36,6	-669
1982	-7,9	96,2	296,9	247,2	152,9	36,7	-665
1983	-7,9	95,8	297,1	247,4	152,3	36,2	-643
1984	-7,4	95,6	297,2	247,4	152,5	35,4	-626
1985	-7,6	95,4	297,0	246,7	153,4	36,5	-641
1986	-7,4	94,9	296,9	246,8	153,3	37,0	-627
1987	-7,6	95,4	296,9	246,4	152,8	36,6	-648
1988	-7,7	95,1	296,8	246,7	153,4	37,9	-658
1989	-7,6	94,6	297,4	247,2	152,1	37,1	-637
<b>1990</b>	<b>-7,7</b>	<b>93,8</b>	<b>297,9</b>	<b>247,3</b>	<b>152,2</b>	<b>37,8</b>	<b>-632</b>
1991	-7,6	93,8	298,2	247,7	152,4	38,1	-641
1992	-7,6	93,8	298,0	247,4	152,3	38,8	-642
1993	-7,3	93,6	297,8	246,9	152,0	37,6	-631
1994	-7,1	93,3	298,0	247,2	152,7	38,3	-632
1995	-7,0	92,5	298,6	247,4	152,7	38,8	-623
1996	-7,3	93,0	298,8	247,1	153,1	40,5	-641
1997	-7,2	93,2	298,6	246,6	152,0	40,1	-635
1998	-7,1	93,0	298,8	246,7	152,6	40,0	-634
1999	-6,8	92,6	298,3	247,1	152,0	39,6	-607
2000	-6,7	92,5	298,3	247,1	152,0	39,4	-598
2001	-6,7	91,9	298,5	246,9	152,4	40,3	-596
2002	-6,3	91,7	298,8	246,9	154,1	40,9	-581
2003	-6,2	92,0	299,1	247,3	155,2	40,9	-588
<b>2004</b>	<b>-5,9</b>	<b>91,2</b>	<b>299,0</b>	<b>247,0</b>	<b>155,1</b>	<b>41,3</b>	<b>-578</b>



Таблица 7.14

**Скользящие 30-летние средние квадратические отклонения текущих оценок агроклиматических показателей системы мониторинга климата холодного периода года (по данным ГМС «Чертково», Ростовская область)**

Год	Температура января, °С	Число дней от 1.01 до даты перехода температуры воздуха через 5 °С		Число дней от 1.01 до даты оптимальных сроков сева озимых	Влагозапасы (мм) метрового слоя почвы		Сумма отрицательных температур воздуха за зиму, °С
		весной	осенью		весной	осенью (28.09)	
<b>1975</b>	<b>4,13</b>	<b>6,7</b>	<b>8,8</b>	<b>6,7</b>	<b>19,5</b>	<b>13,3</b>	<b>242</b>
1976	4,13	6,7	8,8	6,9	19,7	13,5	245
1977	4,13	6,8	8,9	7,1	21,8	13,1	245
1978	3,96	7,3	9,0	7,0	22,8	13,1	244
1979	3,93	7,3	9,1	7,0	23,2	13,0	247
1980	3,64	7,3	9,1	7,0	23,4	12,8	246
1981	3,71	7,0	8,8	7,1	23,7	12,9	256
1982	3,67	6,9	8,7	6,9	23,6	12,8	257
1983	3,73	7,0	8,6	6,9	23,3	12,9	259
1984	3,58	7,0	8,7	6,9	23,1	13,2	231
1985	3,52	6,8	8,6	6,3	21,8	13,6	236
1986	3,62	7,0	8,6	6,3	21,7	13,8	213
1987	3,82	7,6	8,6	6,4	21,8	13,6	229
1988	3,81	7,4	8,7	6,2	21,4	13,3	228
1989	3,83	7,7	8,1	5,7	20,4	12,3	240
<b>1990</b>	<b>3,8</b>	<b>8,2</b>	<b>8,5</b>	<b>5,7</b>	<b>20,4</b>	<b>12,4</b>	<b>247</b>
1991	3,84	8,2	8,7	5,9	20,5	12,2	243
1992	3,87	8,3	8,4	5,8	20,6	12,1	242
1993	3,81	8,2	8,5	5,9	20,5	11,4	236
1994	3,92	8,0	8,6	6,3	20,6	10,9	237
1995	3,93	7,8	8,4	6,3	20,6	10,9	243
1996	3,98	7,9	8,8	6,4	20,6	14,2	242
1997	3,97	7,0	8,6	6,3	20,4	14,4	239
1998	3,95	8,0	8,5	6,4	20,6	14,4	239
1999	3,86	8,1	8,2	6,4	20,9	14,6	238
2000	3,85	8,2	8,2	6,4	20,9	14,7	244
2001	3,9	8,2	8,4	6,4	20,9	16,0	245
2002	3,48	8,3	8,5	6,4	21,7	16,9	238
2003	3,41	8,5	8,5	6,0	20,2	16,9	236
<b>2004</b>	<b>3,41</b>	<b>8,5</b>	<b>8,4</b>	<b>5,5</b>	<b>20,1</b>	<b>17,2</b>	<b>246</b>

Анализ динамики скользящих средних (табл. 7.13) показывает, что с 1975 г. (начала современного «взрывного» потепления) агроклиматические условия холодного периода в северных районах Ростовской области изменялись в благоприятном для сельского хозяйства направлении. Действительно, 30-летняя скользящая средняя температура января с 1975 по 2004 г. повысилась с  $-8,0$  до  $-5,9$  °С. Сумма отрицательных температур воздуха за зиму уменьшилась с 682 до 578 °С. Дата возобновления вегетации озимых сдвинулась на более ранние сроки. В настоящее время вегетация озимых начинается в среднем на 5–6 дней раньше, чем в течение 30-летнего периода, который закончился в 1975 году. Дата прекращения вегетации сдвинулась на более поздние сроки – в среднем на 1–2 дня. Оптимальные сроки сева озимых культур практически не изменились.

Условия вегетации озимых культур осенью улучшились, о чем свидетельствует рост средних многолетних продуктивных влагозапасов метрового слоя почвы на 11 % (с 37,3 до 41,3 мм). Весьма важным свидетельством улучшения влагообеспеченности посевов как озимых, так и яровых культур является рост средних влагозапасов весной на дату возобновления вегетации на 10 % с 1975 по 2004 год.

Данные табл. 7.14 позволяют судить о динамике межгодовой изменчивости агроклиматических показателей за последние 50 лет. Значимым представляется уменьшение дисперсии средней температуры в январе и рост среднеквадратического отклонения осенних влагозапасов на 29 % (с 13,3 до 17,2 мм).

Наиболее информативными для мониторинга представляются данные табл. 7.15, которые нуждаются в специальном комментарии.

Рассмотрим этот вопрос на примере важнейшего показателя – средней температуры самого холодного месяца, характеризующей условия перезимовки. Так, средняя температура воздуха января за период с 1946 по 1975 г. составляла  $-7,9$  °С, что соответствует 50 % обеспеченности ( $v_k = -7,9^\circ$ ). Для 30-летнего периода, завершившегося в 2004 г., обеспеченность этой величины снизилась с 50 до 27,5 %. Таким образом, повторяемость лет со средней температурой воздуха ниже  $-7,9$  °С уменьшилась на 22,5 %. На основании данных табл. 7.15 можно заключить, что повторяемость продуктивных влагозапасов метрового слоя почвы весной ниже 148 мм уменьшилась с 50 % в 1975 г. до 36 % в 2004 году.

Таблица 7.15

**Скользящие 30-летние оценки обеспеченности заданных уровней  
агроклиматических показателей  $y_k$  системы мониторинга  
изменений климата холодного периода года**

Конечный год периода	Температура января, °С	Число дней от 1.01 до даты перехода температуры воздуха через 5 °С		Число дней от 1.01 до даты оптимальных сроков сева озимых	Влагозапасы (мм) метрового слоя почвы		Сумма отрицательных температур воздуха за зиму, °С
		весной	осенью		весной	осенью (28.09)	
<b>1975</b>	<b>0,500</b>	<b>0,500</b>	<b>0,500</b>	<b>0,500</b>	<b>0,500</b>	<b>0,500</b>	<b>0,500</b>
1976	0,502	0,510	0,501	0,511	0,538	0,522	0,515
1977	0,502	0,516	0,504	0,520	0,491	0,542	0,521
1978	0,521	0,556	0,498	0,517	0,472	0,533	0,523
1979	0,531	0,560	0,506	0,515	0,454	0,512	0,513
1980	0,514	0,542	0,506	0,526	0,458	0,504	0,510
1981	0,493	0,506	0,476	0,505	0,441	0,512	0,480
1982	0,498	0,525	0,494	0,521	0,417	0,509	0,475
1983	0,490	0,548	0,484	0,506	0,427	0,525	0,442
1984	0,443	0,563	0,478	0,507	0,423	0,548	0,404
1985	0,455	0,577	0,489	0,550	0,402	0,515	0,433
1986	0,439	0,598	0,492	0,546	0,403	0,501	0,398
1987	0,461	0,565	0,492	0,570	0,413	0,511	0,442
1988	0,470	0,586	0,498	0,553	0,400	0,474	0,460
1989	0,469	0,608	0,465	0,521	0,420	0,496	0,426
<b>1990</b>	<b>0,471</b>	<b>0,638</b>	<b>0,445</b>	<b>0,516</b>	<b>0,418</b>	<b>0,473</b>	<b>0,420</b>
1991	0,466	0,636	0,431	0,486	0,415	0,465	0,434
1992	0,463	0,637	0,440	0,509	0,418	0,441	0,434
1993	0,435	0,645	0,452	0,540	0,423	0,479	0,415
1994	0,412	0,664	0,441	0,519	0,411	0,452	0,417
1995	0,402	0,704	0,412	0,510	0,409	0,436	0,405
1996	0,431	0,678	0,407	0,529	0,402	0,402	0,434
1997	0,429	0,670	0,415	0,561	0,422	0,415	0,422
1998	0,417	0,676	0,405	0,549	0,412	0,419	0,420
1999	0,381	0,693	0,424	0,529	0,423	0,429	0,377
2000	0,376	0,696	0,424	0,529	0,425	0,436	0,367
2001	0,374	0,720	0,416	0,537	0,416	0,418	0,364
2002	0,321	0,728	0,406	0,537	0,389	0,408	0,336
2003	0,301	0,709	0,391	0,513	0,361	0,408	0,346
<b>2004</b>	<b>0,275</b>	<b>0,739</b>	<b>0,394</b>	<b>0,541</b>	<b>0,362</b>	<b>0,401</b>	<b>0,337</b>
<b><math>y_k</math></b>	<b>-7,9</b>	<b>97</b>	<b>297</b>	<b>248</b>	<b>148</b>	<b>37</b>	<b>-682</b>

*Примечание.* В качестве  $y_k$  взяты скользящие средние за 30-летний период, который закончился в 1975 году.

Приведенные выше данные дают возможность заключить, что агроклиматические условия холодного периода северных районов Ростовской области с 1975 г. изменялись в направлении, благоприятном для сельскохозяйственного хозяйства.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Значимые величины коэффициента множественной корреляции R

N	n								
	1	2	3	4	5	6	8	12	24
5 %-ный уровень значимости									
10	0,632	0,758	0,839	0,898	0,942	0,973	1,000		
12	0,576	0,697	0,777	0,838	0,886	0,925	0,979	1,000	
14	0,532	0,648	0,726	0,786	0,835	0,877	0,941	1,000	
16	0,497	0,608	0,683	0,741	0,790	0,832	0,900	0,986	
18	0,468	0,574	0,646	0,703	0,751	0,792	0,861	0,958	
20	0,444	0,545	0,615	0,670	0,717	0,757	0,826	0,927	
22	0,423	0,520	0,587	0,641	0,686	0,726	0,794	0,896	
24	0,404	0,498	0,563	0,615	0,660	0,699	0,765	0,868	1,000
26	0,388	0,479	0,542	0,592	0,636	0,674	0,739	0,840	1,000
28	0,373	0,461	0,523	0,572	0,614	0,651	0,715	0,815	0,993
30	0,361	0,446	0,506	0,553	0,595	0,631	0,693	0,792	0,978
35	0,334	0,414	0,469	0,514	0,552	0,586	0,645	0,741	0,932
40	0,312	0,387	0,439	0,482	0,518	0,550	0,607	0,697	0,886
45	0,294	0,365	0,414	0,455	0,490	0,520	0,574	0,661	0,845
50	0,279	0,346	0,394	0,432	0,465	0,495	0,545	0,629	0,808
55	0,266	0,330	0,375	0,412	0,444	0,473	0,522	0,602	0,776
60	0,254	0,316	0,359	0,394	0,425	0,452	0,500	0,577	0,746
70	0,235	0,292	0,333	0,366	0,395	0,419	0,465	0,538	0,696
80	0,220	0,273	0,312	0,342	0,370	0,393	0,436	0,504	0,655
90	0,207	0,258	0,294	0,323	0,349	0,371	0,411	0,476	0,620
100	0,197	0,245	0,279	0,307	0,331	0,352	0,389	0,452	0,589
1 %-ный уровень значимости									
10	0,765	0,855	0,911	0,949	0,975	0,991	1,000		
12	0,708	0,800	0,860	0,904	0,938	0,963	0,993	1,000	
14	0,661	0,753	0,814	0,861	0,898	0,928	0,971	1,000	
16	0,623	0,712	0,773	0,821	0,859	0,891	0,942	0,996	
18	0,590	0,677	0,737	0,785	0,824	0,857	0,911	0,980	
20	0,561	0,647	0,706	0,752	0,791	0,825	0,880	0,958	
22	0,537	0,620	0,677	0,724	0,762	0,796	0,852	0,934	
24	0,515	0,596	0,652	0,697	0,736	0,769	0,825	0,910	1,000
26	0,496	0,574	0,630	0,674	0,712	0,745	0,800	0,886	1,000
28	0,479	0,555	0,605	0,652	0,690	0,722	0,778	0,864	0,998
30	0,463	0,538	0,590	0,633	0,670	0,701	0,756	0,842	0,989
35	0,429	0,500	0,550	0,591	0,626	0,657	0,709	0,794	0,955
40	0,403	0,469	0,517	0,556	0,589	0,618	0,670	0,752	0,917
45	0,380	0,444	0,489	0,526	0,558	0,587	0,636	0,715	0,880
50	0,361	0,422	0,465	0,501	0,533	0,559	0,606	0,683	0,846
55	0,344	0,403	0,445	0,479	0,509	0,535	0,580	0,656	0,816
60	0,330	0,386	0,426	0,459	0,488	0,514	0,558	0,631	0,785
70	0,306	0,358	0,396	0,427	0,454	0,477	0,520	0,589	0,737
80	0,286	0,336	0,371	0,401	0,426	0,448	0,488	0,554	0,696
90	0,270	0,317	0,351	0,378	0,402	0,424	0,461	0,524	0,660
100	0,256	0,302	0,333	0,359	0,382	0,403	0,439	0,500	0,629

Примечание. N – число наблюдений каждой из переменных, n – число независимых переменных. При n = 1 коэффициент R обращается в обычный коэффициент корреляции.

## Рекомендуемая литература к Книге 1

*Багров Н.А.* Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих // Труды ЦИП. 1959. Вып. 74.

*Багров Н.А.* О некоторых особенностях корреляционного анализа и их применения к прогнозам погоды // Метеорология и гидрология. 1968. № 1.

*Белусов С.Л., Гандин Л.С., Машкович С.А.* Обработка оперативной гидрометеорологической информации с помощью электронных вычислительных машин. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 282 с.

*Вериге С.А., Разумова Л.А.* Почвенная влага и ее значение в сельскохозяйственном производстве. Л.: Гидрометеиздат, 1963. 289 с.

*Вялов Е.А., Марченко А.С.* Пороговые значения выборочного коэффициента множественной корреляции и некоторые их применения. Статистические методы в метеорологии. Новосибирск: АН СССР, Сибирское отделение, 1969.

*Галямин Е.П.* Оптимизация оперативного распределения водных ресурсов в орошении. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 272 с.

*Гандин Л.С.* Объективный анализ метеорологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1963. 283 с.

*Гордеев А.В., Клещенко А.Д., Черняков Б.А., Сиротенко О.Д.* Биоклиматический потенциал России: теория и практика. М.: Товарищество научных изданий КМК. 2006. 516 с.

*Гордеев А.В., Клещенко А.Д., Черняков Б.А., Сиротенко О.Д., Темников В.Н., Усков И.Б., Зоицзе Е.К., Романенков В.А., Рухович Д.И.* Биоклиматический потенциал России: методы мониторинга в условиях изменяющегося климата. М., 2007. 235 с.

*Гордеев А.В., Клещенко А.Д., Черняков Б.А., Сиротенко О.Д., Темников В.Н., Усков И.Б., Романенков В.А., Рухович Д.И.* Биоклиматический потенциал России: меры адаптации в условиях изменяющегося климата. М., 2008. 206 с.

*Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.

*Дмитренко В.П.* Погода, климат и урожай полевых культур. Киев: Ника-центр, 2010. 620 с.

*Дрейпер Н.Р., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. 3-е изд. М. – СПб. – Киев, 2007. 911 с.

*Дроздов О.А.* и др. Климатология. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 568 с.

*Жуковский Е.Е.* Оценка потенциальной эффективности биоклиматической взаимокompенсации как метода повышения устойчивости урожая // Доклады ВАСХНИЛ. 1980. № 1. С. 35–37.

*Жученко А.А.* Адаптивное растениеводство (эколого-генетические основы). Кишинев: Штиинца, 1990. 432 с.

*Мещерская А.В., Руховец Л.В., Юдин М.И., Яковлева Н.И.* Естественные составляющие метеорологических полей. Л.: Гидрометеиздат, 1970.

*Полуэктов Р.А.* Динамические модели агроэкосистемы. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 312 с.

*Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Топаж А.Г.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2006. 392 с.

*Рыжова И.М.* Анализ гумусонакопления в зональных природных экосистемах на основе нелинейной модели // Вестник Московского университета. Сер.17. Почвоведение. 1991. № 1. С. 25–33.

*Пеннинг де Фриз, Ван Лаар.* Моделирование роста и продуктивности сельскохозяйственных культур. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 320 с.

*Сиротенко О.Д.* Многомерный регрессионный анализ как метод исследования урожая сельскохозяйственных культур с гидрометеорологическими факторами // Метеорология и гидрология. 1969, № 12. С. 68–78.

*Сиротенко О.Д.* Об учете связности материалов агрометеорологических наблюдений // Труды ИЭМ. 1969. Вып. 8. С. 52–56.

*Сиротенко О.Д., Удодова А.Ф., Горбачев В.Ф.* Объективный анализ полей осадков как задача квадратического программирования // Труды ИЭМ. 1973. № 32 (40). С. 90–102.

*Сиротенко О.Д.* Математическое моделирование водно-теплого режима и продуктивности агроэкосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 168 с.

*Сиротенко О.Д., Шевцова Л.К., Володарская И.В.* Моделирование влияния климатических и агротехнических факторов на динамику органического углерода пахотных почв // Почвоведение. 2002. № 10. С. 1251–1258.

*Сиротенко О.Д., Романенков В.А., Шевцова Л.К.* Имитационная система поддержки и обобщения результатов многолетних полевых опытов // Агрохимия. 2003. № 10. С. 75–84.

*Сиротенко О.Д., Абашина Е.В., Павлова В.Н., Долгий-Трач В.А.* Разработка системы регионального круглогодичного мониторинга водно-теплого режима посевов сельскохозяйственных культур // Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук. Калуга: АНО КНЦ, 2008. Вып. 13. С. 276–281.

*Сиротенко О.Д., Павлова В.Н.* Новый подход к идентификации функционалов погода–урожай для оценки последствий изменений климата // Метеорология и гидрология. 2010. № 2. С. 92–100.

*Тооминг Х.Г.* Экологические принципы максимальной продуктивности посевов. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 320 с.

*Топаж А.Г.* Принципы оптимальности в математических моделях агроэкосистем: автореф. дис. на соискание ученой степени д-ра техн. наук. СПб., 2009. 46 с.

*Уланова Е.С., Сиротенко О.Д.* Методы статистического анализа в агрометеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 198 с.

*Уланова Е.С., Забелин В.Н.* Методы корреляционного и регрессионного анализа в агрометеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 207 с.

*Франс Дж., Торнли Дж.Х.М.* Математические модели в сельском хозяйстве. М.: Агропромиздат, 1987. 400 с.

*Чирков Ю.И.* Агрометеорологические условия и продуктивность кукурузы. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 251 с.

*Хьюбер Дж.П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.

*Baier W.* Crop-weather analysis model // Int. j. Biometeor. 1973. Vol. 17, N 4. P. 313–320.

*Coleman K., Jenkinson D.S.* A model for the turnover of carbon in soil / D.S. Powlson, P. Smith, J.U. Smith (eds). Evaluation of Soil Organic Matter Models using Existing Long-Term Datasets // NATO ASI Series I. 1996. Vol. 38. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany. P. 237–246.

*Hoerl A.E.* Application of ridge analysis to regression problems // Chem. Eng. Progr. 1962. Vol. 58, N 3.

## Оглавление

Предисловие .....	4
Глава 1. Статистические модели в агрометеорологии .....	7
1.1. О стратегии, методах и проблемах построения моделей «погода – урожай» .....	7
1.2. Нелинейные регрессионные модели .....	15
1.3. Поиск наилучшего набора предикторов .....	19
Глава 2. Альтернативные регрессионные модели .....	26
2.1. Модели с ограничениями на коэффициенты .....	26
2.2. Модели гребневой регрессии .....	31
2.3. Метод главных компонент .....	33
2.4. Робастные модели .....	47
Глава 3. Базовые модели теории продуктивности агроэкосистем .....	51
3.1. Базовая модель продукционного процесса .....	52
3.2. Базовая модель деструкционного процесса .....	56
Глава 4. Прикладные модели продуктивности агроэкосистем .....	60
4.1. Физико-статистические модели .....	60
4.2. Динамические модели .....	62
4.3. Оценка агрометеорологических условий формирования урожа с помощью динамических моделей .....	72
Глава 5. Численные схемы мониторинга запасов продуктивной влаги и составляющих углеродного баланса органического вещества пахотных почв .....	81
5.1. Схема расчета динамики влагозапасов почвы .....	81
5.2. Схема расчета динамики запасов углерода .....	84
Глава 6. Математические модели оптимизации хозяйственных решений на основании агрометеорологических прогнозов .....	88
6.1. Оптимизация структуры посевных площадей на основании прогнозов урожайности .....	89
6.2. Оптимизация размещения сельскохозяйственных культур .....	93
Глава 7. Модели и методы оценки влияния изменений климата для сель- ского хозяйства и землепользования .....	100
7.1. Статистический анализ агроклиматической информации .....	100
7.2. Модели и методы мониторинга изменений климата .....	108
Приложение. Значимые величины коэффициента множественной корреляции $R$ .....	132
Рекомендуемая литература к Книге 1 .....	133

О.Д. Сиротенко

Основы сельскохозяйственной метеорологии

Том II

Методы расчетов и прогнозов в агрометеорологии

Книга 1

Математические модели в агрометеорологии

Корректор: *Н.А. Иванова*

Компьютерная верстка: *Н.Б. Хомченкова*

Оригинал-макет подготовлен в ФГБУ «ВНИИГМИ-МЦД»

249035, Калужская обл., г. Обнинск, ул. Королева, 6