

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ И МОНИТОРИНГУ  
ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ (РОСГИДРОМЕТ)

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Н.П. Шакина**

# **Лекции по динамической метеорологии**

Москва

2013

УДК 551.5  
ББК 26.233  
Ш17

**Шакина Н.П. Лекции по динамической метеорологии.** – М.: ТРИАДА  
ЛТД, 2013. – 160 с.

*Рецензент: доктор географических наук, профессор А.А. Васильев*

Изложено содержание курса лекций по динамической метеорологии, читаемых автором ежегодно начиная с 2009 г. для аспирантов Гидрометцентра России. Рассмотрены основные положения динамики атмосферы и способы ее описания в теоретических и численных моделях. Представлены постановки основных линейных задач об устойчивости атмосферы и важнейшие свойства решений этих задач. Охарактеризованы свойства волновых движений и вихреобразования, описываемых решениями этих задач, и качественные эффекты нелинейного развития неустойчивых возмущений. Теория атмосферного фронтогенеза, модели фронтов и практические их приложения рассмотрены в некоторых деталях. Вкратце обсуждены особенности задач постпроцессинга модельных полей, исследования атмосферных процессов с помощью диагностических расчетов по реальным и модельным данным, верификации численных прогнозов.

Предназначена для аспирантов и студентов старших курсов метеорологических специальностей и научных работников.

Contents is summarized of a course of lectures delivered by Author since 2009 for the post-graduate students in Hydrometeorological Center of Russia. Main assumptions of the atmospheric dynamics are considered along with means of its description in theoretical and numerical models. Formulations are presented of basic linear stability problems and the most important properties of their solutions. Main properties of wave motions and vortex development are outlined as described by the solutions of these problems; qualitative effects of nonlinear development of unstable disturbances are demonstrated. The atmospheric frontogenesis theory, the front models and their practical applications are described in some detail. Features of model field post-processing, of atmospheric processes investigation by means of diagnostic computations on the basis of real and model data, of numerical forecast verification are briefly discussed.

The book is designated for under- and post-graduate students and scientists in meteorology.

## Предисловие

В настоящем издании излагается содержание курса лекций для аспирантов Гидрометцентра России. Автор стремилась осветить основные положения теоретической (динамической) метеорологии, касающиеся закономерностей и механизмов возникновения и эволюции важнейших атмосферных объектов, определяющих погодные условия в средних широтах. При этом учитывалось то обстоятельство, что нередко поступающие в аспирантуру Гидрометцентра России молодые специалисты не имеют систематического метеорологического образования.

Разномасштабные и разнородные волновые и вихревые движения в атмосфере – планетарные волны, циклоны и антициклоны, гравитационные волны и волны Кельвина-Гельмгольца рассмотрены здесь с единых позиций теории гидродинамической неустойчивости атмосферных течений, в которых сосредоточены достаточные для роста возмущений запасы потенциальной или кинетической энергии (в частности, во фронтальных зонах). Помимо теоретических выводов, дается обзор основных методов изучения атмосферных процессов по реальным данным измерений (спектральный анализ, изэнтропический анализ, диагностические расчеты) и полученных таким путем результатов. С учетом специфики научной тематики Гидрометцентра России, рассмотрены также с позиций динамики атмосферы некоторые методические вопросы, в том числе – разработка схем постпроцессинга продукции численных прогностических моделей и углубленный подход к задаче верификации численных моделей (оценка адекватности модельных динамических механизмов).

Наибольшее внимание уделяется физике процессов. Вопросы их численного моделирования не рассматриваются в пределах данного курса, носящего скорее обзорный характер. Рекомендуемая литература включает монографии и учебники, в которых читатель найдет детальное и систематическое изложение проблем, кратко охарактеризованных либо только намеченных в пределах данного курса.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## Силы, действующие в атмосфере

Динамика атмосферы, или динамическая (теоретическая) метеорология, изучает силы, действующие в атмосфере, и движения под действием этих сил, описываемые системами дифференциальных уравнений. Сложность уравнений приводит к тому, что полезные аналитические результаты по ним можно получить только после принятия упрощающих предположений, включающих в себя отбрасывание тех членов уравнений, которые в данной конкретной задаче окажутся несущественными. В результате решения упрощенных таким образом систем уравнений получают идеализированные модели, сохраняющие основные, существенные черты (но не детали) рассматриваемых систем движений. Такие идеализированные модели имеют то достоинство, что выявляют механизмы явлений и эффекты основных действующих в системе сил.

Рассмотрим силы, действующие на частицу атмосферного воздуха, которые должны быть включены в уравнение движения этой частицы, представляющее собой (в векторной форме) формулировку второго закона Ньютона:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\vec{V}$  – скорость частицы;  $\vec{F}$  – действующие силы. Какие это силы?

– *Сила градиента давления*

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (1.2)$$
$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\nabla$  – трехмерный оператор градиента,  $\rho$  – плотность.

Сила градиента давления, величина которой имеет размерность м/с<sup>2</sup>, действует на частицу в неоднородном поле давления. По вертикали ее составляющая много больше, чем по горизонтали, и почти уравнивается

– *силой тяжести*

$$G = \{0, 0, -g\}. \quad (1.3)$$



Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести, направленное вниз и равное силе гравитационного притяжения минус центробежная сила, обусловленная вращением Земли. Эта последняя очень мала в сравнении с силой гравитационного притяжения (равна  $\Omega^2 r$ , где  $r$  – радиус вращения на данной широте  $\varphi$ : здесь  $r = R \cos \varphi$ ;  $R$  – радиус Земли;  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли). Поэтому  $g$  может считаться постоянным;

– **сила Кориолиса, или отклоняющая сила вращения Земли:** Эта сила появляется в уравнениях относительного движения (относительно Земли) и есть фиктивная сила, описывающая эффект движения системы координат, связанных с Землей.

$$\vec{K} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V}.$$

Составляющая  $2\Omega \times V$  по осям координат:

$$\begin{aligned} x: & -2\Omega v \sin \varphi, \\ y: & 2\Omega u \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

если ось  $x$  направлена на восток,  $y$  – на север,  $z$  – вертикально вверх и скорость воздуха  $\vec{V}$  имеет составляющие  $u, v, w$  по этим осям. При этом  $w \ll u$ .

Величина  $f = 2\Omega \sin \varphi$  называется **параметром Кориолиса**.

Для пояснения (1.4) распишем векторное произведение:

$$\vec{\Omega} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i}(\Omega_y w - \Omega_z v) + \vec{j}(\Omega_z u - \Omega_x w) + \vec{k}(\Omega_x v - \Omega_y u),$$

$$\Omega_x = 0$$

$$\Omega_y = \Omega \cos \varphi$$

$$\Omega_z = \Omega \sin \varphi.$$

$$\text{Иначе, } K_x = 2\Omega v \sin \varphi = f v; \quad K_y = -f u.$$

Далее, в атмосфере действует

– **сила трения**

$$\begin{aligned} \vec{T} &= -\nu \nabla^2 \vec{V}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\nabla^2$  – трехмерный оператор Лапласа.

Трение, или вязкость, в атмосфере бывает молекулярным и турбулентным. Молекулярное трение пренебрежимо в сравнении с турбулентным, а турбулентное трение анизотропно: в горизонтальном направлении его коэффициент  $\nu_1$  можно считать постоянным, а в вертикальном –  $\nu_2$  зависит от вертикальной координаты. Будем также различать турбулентную вязкость и турбулентную теплопроводность.

## Уравнения динамики атмосферы

Запишем теперь уравнение (1) в виде составляющих по осям  $x, y, z$  (уравнения Навье-Стокса):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fv + \nu_1 \nabla_2^2 u + \frac{\partial}{\partial z} \nu_2 \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fu + \nu_1 \nabla_2^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nu_2 \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu_1 \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial z} \nu_2 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Здесь  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного перемешивания соответственно.

Кроме уравнений движения, для определенности системы запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0\tag{1.7}$$

и уравнение притока тепла (для потенциальной температуры  $\theta$ )

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu_1 \frac{d\theta}{dt} = \mu_1 \nabla_2^2 \theta + \frac{\partial}{\partial z} \mu_2 \frac{\partial \theta}{\partial z} + \varepsilon,\tag{1.8}$$

где  $\mu_1, \mu_2$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной теплопроводности (турбулентного переноса тепла) соответственно;  $\varepsilon$  – приток тепла любого происхождения.

Эта система дополняется двумя алгебраическими уравнениями: уравнением состояния  $P = \rho RT$  и уравнением Пуассона для потенциальной температуры:

$$\left(\frac{T}{\theta}\right) = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{C_p - C_v}{C_p}}. \quad (1.9)$$

Теперь имеем семь уравнений относительно семи неизвестных функций:  $u, v, w, P, T, \rho, \theta$ .

### Геострофический ветер

Выделим простейший случай: рассмотрим стационарный, невязкий зональный поток. Его характеристики будем обозначать чертой сверху. Вместо системы (1.6) получится

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f \bar{u}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - g, \\ \bar{P} &= \bar{\rho} R \bar{T}, \\ \frac{\bar{T}}{\bar{\theta}} &= \left(\frac{\bar{P}}{P_0}\right)^{\frac{C_p - C_v}{C_p}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из первого уравнения системы видно, что изобары параллельны оси  $x$ ; из второго – что скорость зонального потока есть скорость геострофического ветра, направленного вдоль оси  $x$ , а значит, по изобарам. Из третьего уравнения – что сила тяжести уравновешивается вертикальной составляющей силы градиента давления: третье уравнение есть **уравнение гидростатики**.

Какие факторы могут обуславливать негеострофичность ветра? Все те, которые были отброшены при выводе системы (1.10): трение; нестационарность; негоризонтальность; непрямолинейность. Незональность не нарушает геострофичности, если только остальные упрощения сохраняются: получается только геострофическая компонента ветра по оси  $y$  (на север). Несмотря на сильные ограничения условий геострофичности, ветер в свободной атмосфере все же достаточно близок к геострофическому.

**Свободной атмосферой** называется слой, в котором силой трения можно в целом пренебречь. В отличие от свободной атмосферы, слой, в котором трение (турбулентное) играет роль, сравнимую с силой градиента давления, называется пограничным слоем. Это нижний слой, примыкающий к подстилающей поверхности. Толщина пограничного слоя зависит от свойств подстилающей поверхности. Выше пограничного слоя турбулентное перемешивание в целом очень слабое, но в отдельных слоях бывает значительным и даже сильным. В дальнейшем мы будем говорить об этом подробнее.

Записав второе и третье уравнения (1.10) в виде

$$\begin{aligned} f\bar{u}\bar{\rho} &= -\frac{\partial P}{\partial y}, \\ g\bar{\rho} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

продифференцируем первое уравнение по  $z$ , второе по  $y$  и вычтем, после этого, опуская выкладки, получим

$$f\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{g}{\bar{T}}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}. \quad (1.12)$$

Это известное соотношение термического ветра: вертикальный сдвиг ветра в геострофическом потоке пропорционален горизонтальному градиенту температуры. Баланс термического ветра имеет место благодаря вращению Земли.

Переходя от  $T$  к  $\theta$ , получаем

$$\frac{g}{\theta}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{g}{\theta}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \frac{1-k}{c_s^2}gf\bar{u}. \quad (1.13)$$

Здесь  $c_s = \sqrt{kRT}$  – скорость звука;  $k = \frac{c_p}{c_v} = 1,402$ .

## Соотношение сил. Безразмерные параметры

В зависимости от масштабов движения соотношение сил может меняться. На этом основании в одних задачах учитываются одни силы, в других – другие. Соотношения сил количественно оцениваются безразмерными соотношениями их характерных значений. При этом кроме перечисленных выше сил в рассмотрение принимается сила инерции, т. е. ускорение.

Рассмотрим некоторые безразмерные параметры, характеризующие соотношение сил. Для этого введем масштабы: горизонтальный  $L$ , вертикальный  $H$  (атмосфера анизотропна, и эти масштабы существенно различаются), масштаб скорости  $U$ , масштаб времени для горизонтальных перемещений

$LU^{-1}$ , для вертикальных  $HU^{-1}$ , а также характерный параметр Кориолиса  $2\Omega \sin \varphi = f$ .

Отношение силы инерции к силе Кориолиса называется числом Россби:

$$\text{Ro} = \frac{(dV/dt)_x}{fU} = \frac{U^2}{LfU} = \frac{U}{Lf}. \quad (1.14)$$

Здесь в качестве характерного значения силы инерции, равной ускорению частицы, взято характерное значение нелинейного члена  $d\vec{V}/dt$ , то есть  $(u \partial u / \partial x)$ , и это характерное значение равно  $U^2 / L$ .

Если сила Кориолиса мала по сравнению с левой частью уравнений движения, т. е.  $\text{Ro}$  велико, то, значит, силой Кориолиса можно пренебречь. Как видим, это зависит как от масштаба движений (именно, сила Кориолиса пренебрежима при малых масштабах), так и от характерной скорости: чем она больше, тем больше  $\text{Ro}$ .

При обычных для атмосферы скоростях масштаб, при котором сила Кориолиса не учитывается, – это 10 км или несколько больше (15–20 км) в средних широтах.

Сравнивая силу инерции с силой трения, находим в качестве меры их сравнительной значимости безразмерное число Рейнольдса для горизонтальной турбулентной вязкости

$$\text{Re}_h = \frac{UL}{\nu_1}, \quad (1.15)$$

для вертикальной турбулентной вязкости

$$\text{Re}_v = \frac{UH^2}{L\nu_2}.$$

Обратная величина

$$\text{Ko} = \frac{L\nu_2}{UH^2} \quad (1.16)$$

называется числом Кочина.

Аналогичные выражения можно получить для турбулентной теплопроводности.

Вводится также коэффициент анизотропии движений (aspect ratio)

$$a = \frac{H}{L}. \quad (1.17)$$

Соотношение между турбулентной вязкостью и теплопроводностью дается числом Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\nu_2}{\mu_2}. \quad (1.18)$$

Обычно принимается, что число Прандтля одинаково для вертикального и горизонтального обмена ( $\nu_2 / \mu_2 = \nu_1 / \mu_1$ ), а для атмосферы  $Pr = 1$ .

Обратившись к уравнению (1.13), введем еще один безразмерный параметр – число Маха

$$Ma = \frac{U}{c_s}. \quad (1.19)$$

Вообще говоря,  $Ma$  для атмосферных движений мало, и в (13) можно с высокой точностью пренебречь вторым слагаемым. Однако в некоторых задачах приходится оценивать члены, в коэффициенты при которых входит число  $Ma$ , и выносить суждение, малы ли эти члены, на основании их сравнения с коэффициентами при других членах.

Еще один безразмерный параметр – отношение силы Кориолиса к силе трения. Из первого уравнения системы (1.6), взяв отношение размерных коэффициентов при  $f\nu$  и при последнем члене и полагая характерные значения  $u$  и  $v$  одинаковыми и равными  $U$ , получаем  $fH^2/\nu_2$ . В динамической метеорологии используется не сама эта безразмерная величина, а ее квадрат, называемый числом Тэйлора

$$Ta = \frac{f^2 H^4}{\nu_2^2}. \quad (1.20)$$

Чтобы обсудить вклад силы плавучести в сравнении с другими силами, надо отказаться от рассмотрения гидростатического движения и вместо него рассмотреть условия, когда имеются отклонения температуры от состояния гидростатики.

В динамике атмосферы используются и другие безразмерные критерии, такие, как число Ричардсона и число Рэлея, но их не так удобно выводить непосредственно из уравнений движения. Мы будем их получать при рассмотрении конкретных задач, в которых они являются определяющими параметрами.

### Линеаризация уравнений. Приближение Буссинеска

Прделаем операцию, называемую линеаризацией уравнений относительно «основного» зонального, стационарного, геострофического и гидростатического движения (1.10). Для этого представим все переменные в виде сумм их значений в основном потоке и отклонений от них:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'. \quad (1.21)$$

Подставляя такие выражения в члены уравнения, содержащие произведения, пренебрежем квадратами величин со штрихами. Иначе говоря, ограни-

чимся членами первого порядка по отклонениям. Это упрощение основывается на допущении малости отклонений в сравнении с характеристиками основного потока.

Так, вместо  $(u \partial u / \partial x)$  запишем

$$(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x}.$$

Первое слагаемое справа нулевого порядка, т. е. содержит  $u'$  в нулевой степени. Второе и третье слагаемые – первого порядка по  $u'$ , или линейные, а последнее слагаемое – второго порядка, или квадратичное. Только члены первого порядка оставляем в уравнениях, и они становятся линейными относительно отклонений. Учитывая, что основной поток зонален и его скорость не зависит от  $x$ , а отклонения зависят от всех координат и от времени, оставляем в последнем выражении только  $\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}$ .

Аналогично линеаризуем остальные члены системы (1.6). Получим систему относительно возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + f v' + v_1 \nabla^2 u' + \frac{\partial}{\partial z} v_2 \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ &\dots \\ &\dots \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + v' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \mu_1 \nabla^2 \theta' + \frac{\partial}{\partial z} \mu_2 \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \varepsilon, \\ P' \frac{1}{k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} &= \bar{\rho} R \theta' + \rho' R \bar{\theta}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из последнего уравнения, разделив его на  $\rho R \theta$ , после несложных преобразований получаем

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{P'}{\bar{\rho} c_s^2}. \quad (1.23)$$

Относительные отклонения плотности равны взятым с обратным знаком отклонениям потенциальной температуры плюс слагаемое, которое может считаться малым при условии, что  $c_s$  велико.

Если этим слагаемым пренебречь, получаем приближенное равенство

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\theta'}{\bar{\theta}}. \quad (1.24)$$

Это так называемое приближение Буссинеска (приближение свободной конвекции). В случаях, когда оно приемлемо (а это случаи сравнительно медленных процессов с небольшими вертикальными масштабами), в уравнениях можно заменять отклонения плотности на отклонения потенциальной температуры (с обратным знаком).

Уравнение неразрывности в (1.22) принимает вид уравнения несжимаемости, если члены, описывающие  $\partial \rho' / \partial t$ , пренебрежимы по сравнению с членом со скобкой. Роль сжимаемости сложна, и мы о ней еще будем говорить.

## Энтропия и потенциальная температура

Обратимся к уравнению притока тепла. Приток тепла к единице массы, обозначенный выше через  $\varepsilon$ , представим в виде  $dW/dt$ , где  $W$  – количество тепла. Оно будет потрачено на изотермическое повышение давления воздуха и на повышение его температуры при постоянном давлении:

$$dW = c_p dT - \alpha dP. \quad (1.25)$$

Здесь  $\alpha$  – удельный объем.

Введем в рассмотрение величину

$$E = \int \frac{dW}{T} + const. \quad (1.26)$$

Эта величина называется энтропией. Постоянное слагаемое здесь стоит потому, что неопределенный интеграл может быть взят от любого начального состояния, и тогда энтропия перехода от одного начального состояния к другому и образует это слагаемое. В метеорологии начальную (нулевую) точку энтропии выбирают при начальном давлении  $P_0 = 1000$  гПа и температуре  $T_0 = 100$  К. Тогда соответствующая постоянная будет обозначаться  $E_0$ .

Преобразуем (1.25), разделив его на  $T$ , и с использованием уравнения состояния получим полный дифференциал

$$\frac{dW}{T} = c_p d(\lg T) - R d(\lg P). \quad (1.27)$$

Проинтегрируем это уравнение от нормальных до произвольных условий, получим

$$E - E_0 = c_p \lg T - R \lg P. \quad (1.28)$$

Если в рассматриваемом процессе частица воздуха термически изолирована – не получает и не теряет тепла, то **процесс адиабатический**:  $E = E_0$ , и из (1.27) получим уравнение для потенциальной температуры:



$$\frac{T}{T_o} = \left( \frac{P}{P_o} \right)^{\frac{R}{c_p}},$$

где  $R = c_p - c_v$ ;  $R/c_p = 0,288$ . Или, положив  $P_o = 1000$  гПа и  $T_o = T(P_o) = \theta$ , получим

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

Потенциальная температура определяется как температура, которую примет воздух, если его адиабатически привести к давлению 1000 гПа.

Таким образом, потенциальная температура, как и энтропия, при адиабатическом процессе однозначно определяется начальными значениями  $P$  и  $T$ . Иначе говоря, обе эти величины в адиабатическом процессе постоянны.

Отсюда вытекает, что в адиабатическом процессе поверхность постоянной энтропии – изэнтропическая поверхность – является поверхностью субстанциональной, т. е. состоит из одних и тех же частиц. Поскольку эти же поверхности являются и поверхностями постоянной потенциальной температуры (полезно иметь в виду соотношение  $E = c_p \lg \theta + C$ ), то их также называют изэнтропическими поверхностями. В ряде задач удобно использовать изэнтропические, а не изобарические поверхности, именно из-за их субстанциональности в адиабатических условиях. В этом случае уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial M}{\partial x} + fv, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial M}{\partial y} - fu, \end{aligned} \tag{1.29}$$

где  $M = (c_p T + gH)_\theta$  – **потенциал Монтгомери**. Здесь индекс  $\theta$  означает, что величина определяется на поверхности постоянного  $\theta$ .

## Геопотенциал

Вернемся к уравнениям зонального геострофического движения (1.10)

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}, \\
0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f \bar{u}, \\
0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - g
\end{aligned}$$

и уравнению термического ветра (1.12)

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{g}{\theta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}.$$

Из (1.12) видим, что, поскольку основная крупномасштабная разность температур – это разность между экватором и полюсом, то правая часть (1.12) будет в планетарном масштабе положительна, и, значит, ветер будет иметь с высотой приращение в виде усиления западного потока. Это усиление западного ветра будет сохраняться до тех пор, пока сохраняется знак градиента температуры в меридиональном направлении.

Теперь рассмотрим трехмерное движение частицы воздуха. Пусть частица движется на восток, и при изменении ее положения на  $\delta \vec{r}$  давление меняется на  $\delta p$ . Тогда из общих соображений можно записать

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z = \nabla p \delta \vec{r}. \quad (1.30)$$

Здесь справа стоит скалярное произведение горизонтального градиента давления

$$\nabla p = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}$$

на вектор перемещения частицы  $\delta \vec{r}$  ( $\delta x, \delta z$ ). Если частица движется по изобарической поверхности, то получаем (аналогичное выражение имеет место и для движения частицы на север):

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial z}}; \quad \frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{\partial p}{\partial z}}. \quad (1.31)$$

Из уравнения статики (1.10) подставляем  $\partial p / \partial z$  и получаем, заменяя  $\delta$  на  $\partial$ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial z}{\partial x}; \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (1.32)$$

Здесь  $\partial p / \partial x, \partial p / \partial y$  являются изменениями  $p$  на единицу расстояния вдоль горизонтальных осей, тогда как  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$  являются изменениями высоты вдоль наклонной изобарической поверхности на единицу расстояния вдоль горизонтальных осей. Если высота изобарической поверхности представлена на карте посредством системы изогипс, то  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$  будут компонентами градиента этих изогипс.

Мы видим, что при этих компонентах в (1.32) стоит множитель  $g$  – составляющая силы тяжести по оси  $z$  (см. (1.3)).

По отношению к силе тяжести существует потенциал. По определению, **скаляр по отношению к своему градиенту является потенциалом**. Если вектор силы тяжести рассматривать как градиент скалярной величины  $\check{\Phi}$ , то эта величина, потенциал, будет  $\check{\Phi} = gz$ . Она называется **геопотенциалом**.

Составляющие скорости геострофического ветра, выраженные через геопотенциал:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{f} \frac{\partial \check{\Phi}}{\partial y} \\ v &= \frac{1}{f} \frac{\partial \check{\Phi}}{\partial x} \end{aligned}, \quad (1.33)$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial \check{\Phi}}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{f} \frac{\partial \check{\Phi}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Если  $f = \text{const}$ , то  $\check{\Phi}$  есть функция тока: по изолиниям  $\check{\Phi}$ , т. е. по изогипсам, направлены мгновенные скорости.

В задачах динамической метеорологии часто вместо  $\check{\Phi} = gz$  в качестве геопотенциала используют величину  $\frac{\check{\Phi}}{f} = \Phi$ , причем стоящую в знаменателе величину параметра Кориолиса считают постоянной, равной среднему значению ( $f = f_0$ ).

Продифференцируем первое уравнение (1.33) по  $x$ , второе по  $y$  и, пренебрегая производной от  $f^{-1}$ , сложим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.34)$$

Таким образом, геострофическое движение бездивергентно. Теперь продифференцируем первое уравнение по  $y$ , второе по  $x$  и вычтем из второго первое:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 \Phi. \quad (1.35)$$

Относительный геострофический вихрь  $\zeta$  равен лапласиану от геопотенциала  $\Phi$ .

### Абсолютный вихрь – инвариант баротропного движения

Предполагая движение горизонтальным, бездивергентным и невязким, из (1.6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Расписав  $du/dt$ , снова продифференцируем первое уравнение по  $y$ , второе по  $x$  и вычтем из второго первое. После выкладок с учетом (1.35) получим

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \frac{d}{dt}(\nabla^2 \Phi + f) = 0. \quad (1.37)$$

Таким образом, абсолютный вихрь является инвариантом системы (1.36): он сохраняется в индивидуальной частице.

В (1.36)–(1.37) движение негеострофическое (существует ускорение), но горизонтальное ( $w = 0$ ) и бездивергентное. Можно показать, что такое движение имеет место в баротропной среде, т. е. в такой, где  $\rho = \rho(p)$ , или, иначе говоря, изобарические поверхности параллельны изостерическим, т. е. поверхностям постоянной плотности.

**Итак, при баротропном движении абсолютный вихрь частицы является сохраняемой величиной. (То же имеет место при изэнтропическом движении).**

Для моделирования атмосферных движений, а значит для численного прогноза, имело в свое время большое значение умение представить атмосферные движения в возможно более простом виде, но при этом что-то самое важное сохранить. Первые численные модели были, естественно, баротропными. Следующим шагом в сторону реальности было квазигеострофическое приближение.

## Квазигеострофическое движение и его инвариант

В квазигеострофическом приближении ветер в уравнениях движения описывается геострофическими соотношениями, но при этом движение считается не бездивергентным, так что существуют вертикальные движения (хотя они в этом приближении сравнительно слабые). Их определяют не через соотношения геострофического ветра (тогда бы они были равны нулю), а из других уравнений – именно, либо из уравнения неразрывности, либо из уравнения притока тепла в адиабатическом приближении.

Квазигеострофическое уравнение вихря имеет вид

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} = 0, \quad (1.38)$$

где  $\Phi_0$  удовлетворяет геострофическим уравнениям (1.36), а неизвестным является  $\zeta_g$  – относительный квазигеострофический потенциальный вихрь:

$$\zeta_g = \nabla^2 \Psi + \frac{f^2}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), \quad (1.39)$$

где

$$\Psi = \frac{p - p_0}{f_0 \bar{\rho}} \text{ – функция тока (аналог } \Phi \text{);}$$

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (1.41)$$

– квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты гравитационных волн), играющий в данном контексте роль характеристики вертикальной температурной стратификации.

Уравнение (1.38) линейно относительно  $\zeta_g$ , постольку  $\Phi_0$  известно. Это уравнение имеет свой инвариант – это **квазигеострофический абсолютный потенциальный вихрь**:

$$\frac{d}{dt} (\zeta_g + f) = 0. \quad (1.42)$$

## Примитивные (полные) уравнения и потенциальный вихрь Эртеля

С развитием вычислительной техники и численных методов решения дифференциальных уравнений, в численных моделях атмосферы стали использоваться не квазигеострофические, а так называемые примитивные, или полные, уравнения.

Система примитивных уравнений является полностью нелинейной и в этом отношении соответствует (1.6). Однако примитивные уравнения являются адиабатическими и, в частности, невязкими (поскольку вязкость и теплопроводность, строго говоря, также неадиабатические факторы). Инвариантом системы примитивных уравнений является **потенциальный вихрь Эртеля**

$$PV = -g(\zeta + f) \frac{\partial \theta}{\partial p}. \quad (1.43)$$

Мы рассмотрели, таким образом, инварианты систем уравнений, которые имеют наибольшее значение и понадобятся нам в этом курсе.

Следует иметь в виду, что перечисленные инварианты представляют собой вертикальные составляющие соответствующих векторов вихря. Горизонтальные их составляющие обычно пренебрегаются как малые в сравнении с вертикальными. Так, для потенциального вихря Эртеля полное векторное выражение будет

$$P\vec{V} = \frac{1}{\rho} (f\vec{k} + \nabla \times \vec{V}) \nabla \theta. \quad (1.44)$$

## Виды энергии частиц воздуха

Рассмотрим теперь виды энергии, которыми обладает воздушная частица. Это внутренняя, кинетическая и потенциальная энергии.

**Внутренняя энергия** для идеального газа определяется температурой. Приращение внутренней энергии, см. (1.25)–(1.26), – это приток либо сток тепла, который в уравнении притока тепла мы обозначали  $\varepsilon$ :

$$dW = c_v dT + p d\alpha = c_p dT - \alpha dP, \quad (1.45)$$

где  $\alpha$  – удельный объем.

В адиабатическом процессе  $dW = 0$ . Неадиабатические факторы, обуславливающие изменение внутренней энергии – это так называемая трансформация при смещении холодной воздушной массы на теплую подстилающую поверхность или наоборот (передача тепла происходит через турбулентное перемешивание и радиационный обмен), это солнечный нагрев днем (нагревается подстилающая поверхность и затем передает тепло в воздух путем того же турбулентного обмена и длинноволнового излучения) и выхолаживание ночью, а также тепло фазовых переходов.

Во многих основных задачах динамической метеорологии принимается условие **адиабатичности**. В адиабатическом процессе:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} + gz + c_p T \right) = 0, \quad (1.46)$$

где  $u^2 + v^2 / 2$  – кинетическая энергия частицы;  $gz$  – ее полная потенциальная энергия; а величина  $c_p T$  называется **энтальпией**. Вывод этого соотношения, довольно простой (Халтинер, Мартин, 1960).

Потенциальная энергия, равная  $gz$ , неудобна для нашего анализа, потому что в такой записи не видно, какая ее доля может быть израсходована в условиях атмосферы на приращение кинетической энергии. Эта доля называется **доступной (available) потенциальной энергией**, которая определяется для адиабатически замкнутой системы (не для частицы).

Определение ее таково: доступная потенциальная энергия (ДПЭ) представляет собой разность между потенциальной энергией системы в рассматриваемом состоянии и той потенциальной энергией, которая соответствует наиболее устойчивому состоянию системы после изэнтропического перераспределения массы. В этом последнем состоянии изобарические и изэнтропические поверхности горизонтальны, а потенциальная температура растет с высотой.

Формула для ДПЭ получается интегрированием уравнения квазигеострофического вихря (1.38) по области, ограниченной земной поверхностью и верхней границей (тропопаузой), а по горизонтали имеющей вид широтной полосы (вокруг полушария), внутри которой можно считать параметр Кориолиса линейно зависящим от широты:

$$\frac{df}{dy} = \beta. \quad (1.47)$$

(Это так называемое **бета-приближение**, которое мы будем в дальнейшем использовать).

В результате для ДПЭ получается выражение (здесь сохраняем обозначения Педлоски (Педлоски, 1984))

$$G = \frac{\rho_s \theta_0^2}{2S}, \quad (1.48)$$

где  $\rho_s(z)$  – стандартное распределение плотности по высоте;  $\theta_0$  – отклонение потенциальной температуры от ее стандартного профиля  $\theta_s$ , так что

$$\theta = \theta_s(z) + \varepsilon F \theta_s(z) \theta_0 + \dots, \quad (1.49)$$

где  $F = (f_0 L^2) / (gH)$  – безразмерный параметр, равный отношению числа Фруда

$$Fr = \frac{U^2}{gH} \quad (1.50)$$

к квадрату числа Россби  $Ro^2 = U^2 / (Lf)^2$ ;

$$S = \frac{N_s^2 H^2}{f_0^2 L^2}, \quad (1.51)$$

где  $N_s$  – частота Брента-Вайсяля при стандартном профиле плотности.

Таким образом, доступная потенциальная энергия является квадратичной положительно определенной функцией отклонений поверхностей  $\theta$  от их равновесного горизонтального положения.

Очевидно, что если изоповерхности  $\theta$  горизонтальны, то запасов доступной потенциальной энергии нет. Это случай баротропного движения.

**Бароклидная атмосфера – это атмосфера, в которой изэнтропические поверхности (или изостерические) негоризонтальны и пересекают изобарические поверхности.** В бароклидной среде имеется доступная потенциальная энергия, которая может при должных условиях превратиться в кинетическую.



## **2. ПРОЯВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В АТМОСФЕРЕ: ВОЛНЫ, ВИХРИ, КОНВЕКЦИЯ**

### **Определения**

В атмосфере постоянно происходит обмен энергией – кинетической и доступной потенциальной, – как в результате неравномерной адвекции (нелинейного взаимодействия полей ветра и температуры), так и в результате других, не менее важных процессов.

Существует целый класс процессов, которые реализуют энергию, накопившуюся в каких-либо областях (будь то кинетическая или доступная потенциальная энергия) и передают ее движениям других масштабов. Эти процессы являются предметом изучения в **теории гидродинамической неустойчивости**.

Если в какой-либо области или слое возникают достаточно большие контрасты скорости ветра (и значит, кинетической энергии) или температуры (и значит, доступной потенциальной энергии ДПЭ), то в этой зоне появляется возможность роста малых возмущений, которые принимают вид волн и вихрей. Развиваясь и смещаясь, а затем и разрушаясь, они перемешивают воздух, в результате чего контрасты сглаживаются. Примером может служить циклоническая деятельность. Вихри синоптических масштабов – циклоны и антициклоны, – развиваясь в бароклинических фронтальных зонах, переносят тепло к северу и вверх, а количество движения – вниз, уменьшая при этом запасы ДПЭ.

Возмущения, которые могут расти в таких условиях, возникают от разных причин, например при обтекании ветровым потоком неровностей земной поверхности. Они могут создаваться также вследствие термической неоднородности поверхности, различий альбедо или шероховатости ее различных участков. Источниками возмущений являются многие метеорологические объекты (атмосферные фронты, конвективные облака, циклоны, ураганы, струйные течения), где ввиду нестационарности потока происходит приспособление поля давления к полю ветра, а также извержения вулканов, смещение лунной тени при затмении Солнца, землетрясения и пр.

При изучении процессов роста и распространения возмущений они могут считаться либо вынужденными, либо свободными. В первом случае они рассматриваются вместе с породившим их источником, свойства которого известны. Во втором случае считаются потерявшими связь с источником и зависящими лишь от свойств воздушного потока, в котором они находятся.

Свободные возмущения, которые способны расти в данном воздушном потоке, черпая энергию из имеющихся в нем запасов, называются **неустойчивыми**; с другой стороны, и сам поток (именуемый **фоновым** либо **основным**) называется **неустойчивым**, если он в состоянии **обеспечить рост каких-либо возмущений**. Термин «неустойчивый», таким образом, употребляется в двояком смысле. Энергия, которая может быть использована для роста возмущений, называется энергией неустойчивости, а процесс ее реализации (процесс развития возмущений) называется процессом разрешения неустойчивости.

Проявления неустойчивости в атмосфере многообразны и зависят от того, каким из действующих в атмосфере сил определяется поведение возмущений. Соответственно, выделяют различные типы неустойчивости. Наиболее широко известна **статическая** или **конвективная** неустойчивость, обусловленная действием силы плавучести, которая зависит от вертикальной стратификации температуры. Статическая неустойчивость в чистом виде развивается в покоящемся слое воздуха со сверхадиабатической стратификацией.

В отличие от конвективной неустойчивости, **гидродинамическая неустойчивость наблюдается только в движущейся среде**. Причиной ее возникновения является неоднородное распределение скоростей в основном потоке. Существует несколько видов гидродинамической неустойчивости.

Наиболее простой из них – **неустойчивость Рэлея**, т. е. неустойчивость плоскопараллельного потока термически однородной невязкой (идеальной) жидкости вне влияния силы Кориолиса. Ее наблюдают в лабораторных установках. В атмосфере подобные условия возможны в пограничных слоях для движений небольших масштабов. Источником энергии растущих возмущений в этом случае является кинетическая энергия основного потока. Если скорость распределена так, что завихренность монотонно изменяется поперек потока, то последний устойчив (теорема Рэлея). В противном случае он может быть неустойчивым.

Завихренность в потоке, о котором идет речь в теореме Рэлея, равна  $du/dy$ . Если она монотонно изменяется поперек потока (по оси  $y$ ), то это выражается в сохранении знака ее производной по этому направлению. При этих условиях поток устойчив. Если же производная завихренности меняет знак где-либо (при каком-либо  $y$ ), т. е.  $d^2u/dy^2 = 0$  при  $y = y_c$ , то возможна неустойчивость. Теорема Рэлея дает достаточное условие устойчивости или необходимое условие неустойчивости.

При учете вязкости задача об устойчивости плоскопараллельного невращающегося потока сильно усложняется. Влияние вязкости неоднозначно и отнюдь не сводится к простой стабилизации. Даже напротив, известны случаи, когда поток невязкой жидкости устойчив, а вязкой с тем же профилем скорости и при прочих равных условиях – неустойчив. Применительно к

атмосфере вязкость играет ограниченную роль, поскольку во многих случаях числа Рейнольдса  $Re = UL/\nu$  велики.

Для проявлений гидродинамической неустойчивости в атмосфере наибольшее значение имеют **сила Кориолиса и сила плавучести**. В зависимости от их соотношения и от формы профиля ветра выделяются несколько видов неустойчивости, характерных для атмосферы. Так, **в поле силы Кориолиса гидродинамическая неустойчивость невязкого термически однородного потока, в котором скорость меняется только в зависимости от поперечной к потоку координаты, называется баротропной неустойчивостью.**

Этот вид неустойчивости мы рассмотрим первым. Он наиболее простой, и на этом примере будут проведены все типичные для таких задач упрощения.

Начальные стадии роста неустойчивых возмущений изучаются путем **линейного анализа** в следующих основных предположениях:

**1. Возмущения считаются весьма малыми («бесконечно малыми»)** по амплитуде (употребляется термин «инфинитезимальные» – infinitesimal). Все их взаимодействия между собой, а также их влияние на исходное основное течение пренебрежимы. Значение имеет только воздействие основного потока на возмущения: он может отдавать им энергию, но она у него от этого не уменьшается. В этом смысл «бесконечной малости» возмущений.

**2. Возмущения представимы в виде набора гармонических составляющих**, и поскольку взаимодействия пренебрежимы, можно заменить анализ поведения возмущений произвольного вида анализом всех его волновых составляющих, называемых «элементарными волнами» или «нормальными модами» возмущений.

Если получено, что некоторые из нормальных мод могут расти в данном основном потоке, то очевидно, что наибольший интерес представляет наиболее быстро растущая мода, так как в процессе роста возмущения она будет доминировать. Линейный анализ включает выделение того класса условий, при которых возможен рост возмущений, и нахождение показателей роста и других характеристик наиболее неустойчивых волн.

Реальные возмущения имеют конечные, а не бесконечно малые амплитуды. Тем не менее, линейное приближение очень содержательно физически. Можно утверждать, что если некоторое состояние неустойчиво по линейной теории, то оно неустойчиво и относительно конечных возмущений. Вместе с тем линейный анализ нельзя считать во всех случаях достаточным: устойчивые по линейной теории состояния могут оказаться неустойчивыми относительно конечных возмущений. Все же во всех наиболее практически важных случаях линейный анализ дает не только правильные указания на наличие или отсутствие неустойчивости, но и правильно указывает основные особенности структуры развивающихся возмущений.

### Задача о баротропной неустойчивости зонального потока на $\beta$ -плоскости. Волны Россби

Будем считать основной поток **невязким, гидростатическим и геострофическим**, а возмущения – **квазигеострофическими и бездивергентными**.

Систему уравнений (1.6) линеаризуем относительно возмущений, опустив члены, описывающие вязкость. Представим возмущенный поток в виде суммы основного потока и возмущений

$$u = \bar{u}(y) + u'(x, y, t), v = v'(x, y, t), w = w' = 0, p = \bar{P}(y, z) + p'(x, y, t)$$

и, подставив эти выражения в (1.6), выпишем систему уравнений для основного потока

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} &= -f\bar{u} \\ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} &= -g\end{aligned}\tag{2.1}$$

и систему уравнений, в которых сохранены только члены первого порядка по возмущениям. То есть, линеаризуем систему уравнений относительно возмущений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + fv', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} - fu', \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

При условии бездивергентности можно ввести функцию тока  $\psi$  :

$$\begin{aligned}u' &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v' &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.3}$$

Продифференцировав первое уравнение по  $y$ , второе по  $x$  и вычтя из второго первое, получим уравнение относительно  $\psi$  (уравнение для завихренности  $\xi = \partial v' / \partial x - \partial u' / \partial y$ ):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi + (\beta - \bar{u}'') \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь  $\beta = df / dy$ . Представим возмущения в виде нормальных мод с амплитудной функцией, зависящей от  $y$ , и введем фазовую скорость возмущения  $c$

$$\psi = \Psi(y) e^{ik(x-ct)}. \quad (2.5)$$

При подстановке (2.5) в (2.4) будем иметь в виду следующее:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -k^2 \Psi + \Psi'', \\ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} &= ik(\bar{u} - c), \\ \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= -ikc(-k^2 \Psi + \Psi''), \\ \frac{\partial}{\partial x} &= ik\Psi. \end{aligned}$$

Относительно  $\Psi$  получим уравнение

$$\Psi'' - \left[ k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] \Psi = 0. \quad (2.6)$$

На границах широтной полосы, в которой задан профиль  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ , ставятся однородные граничные условия (это значит, что возмущения являются свободными)

$$\Psi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = 2b. \quad (2.7)$$

Иначе говоря, на границах широтной полосы

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v' = 0. \quad (2.8)$$

Это означает непротекание через границы полосы.

После перехода к безразмерным величинам (введения масштабов  $U, L, \beta = f / L$ ) при

$$\beta_\delta = \frac{\beta L^2}{U} \quad (2.9)$$

в уравнении появится число Россби  $Ro = U / Lf$  – определяющий параметр данного вида неустойчивости:

$$\Psi_{\delta}'' - \left[ k_{\delta}^2 - Ro^{-1} \frac{\beta_{\delta}}{\bar{u}_{\delta} - c_{\delta}} + \frac{\bar{u}_{\delta}''}{\bar{u}_{\delta} - c_{\delta}} \right] \Psi_{\delta} = 0, \quad (2.10)$$

$$\Psi_{\delta} = 0, \quad y = 0; 2b.$$

Сформулированная задача, очевидно, имеет решение  $\Psi \equiv 0$ .

Это так называемое тривиальное решение. Любая задача об устойчивости, состоящая из однородного уравнения и нулевых граничных условий, имеет тривиальное решение. Нас же интересуют нетривиальные решения, которые, возможно, существуют при определенных сочетаниях параметров  $c, k, \beta, Ro$ . Эти нетривиальные решения, удовлетворяющие уравнению и граничным условиям, и надо найти.

Обычно  $k, \beta, Ro$  задают, а фазовую скорость, при которой существуют нетривиальные решения, ищут. Такие значения фазовой скорости называют собственными значениями или собственными числами (eigenvalues), а вся задача, состоящая из уравнения и граничных условий, называется задачей на собственные значения (eigenvalue problem). Иногда в качестве собственных значений ищут не  $c$ , а  $k c = -\omega$ .

Какими могут быть собственные значения  $c$ ? Очевидно, они в принципе могут быть либо действительными, либо комплексными. В первом случае им будут соответствовать нейтральные (не растущие и не затухающие) волны, во втором – растущие по амплитуде либо затухающие волны:

$$e^{-ikct} = \exp(-ik(c_r + ic_i)t) = \exp(-ikc_r t) \exp(kc_i t) =$$

$$= [\cos kc_r t - i \sin kc_r t] \exp(kc_i t).$$

Здесь  $kc_i$  – показатель роста данной гармоники.

При этом может возникнуть ситуация, когда действительное собственное значение окажется равным скорости основного потока в какой-либо точке:

$$\bar{u}(y_k) = c. \quad (2.11)$$

В этом случае в уравнении появляется особая точка  $y_k$ , в которой уравнение сингулярно. Значение координаты, соответствующей сингулярности, называется критическим уровнем. Решения уравнения, соответствующие такому  $c$ , называются сингулярными нейтральными волнами. Они имеют ряд особенностей, о которых мы скажем позже.

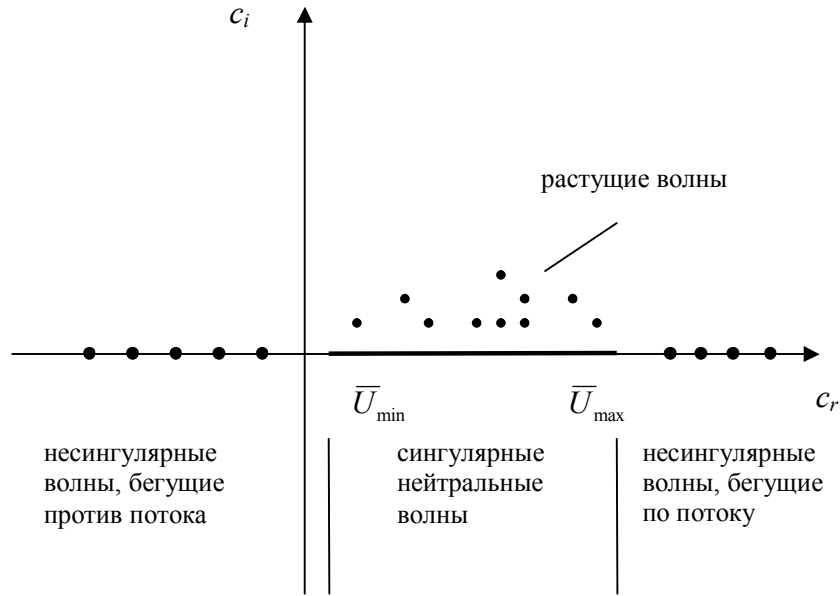
Очевидно, фазовые скорости нейтральных сингулярных волн лежат в интервале

$$u_{\min} \leq c \leq u_{\max}. \quad (2.12)$$

Вне этого интервала лежат фазовые скорости несингулярных волн. Их существование обусловлено наличием восстанавливающей силы, стремящейся вернуть частицу в исходное положение равновесия. Например, в термически устойчиво стратифицированной среде несингулярными нейтральными волнами являются гравитационные волны.

Сингулярные волны существуют постольку, поскольку существует неустойчивость. Все существующие при заданных  $\beta$  (или  $Ro$ ) и  $u(y)$  собственные значения образуют **спектр собственных значений**.

В плоскости  $c_r, c_i$  собственные значения располагаются так, как показано на рис. 2.1. Здесь показан весь спектр собственных значений.



**Рис. 2.1.** Собственные значения задач о гидродинамической неустойчивости в плоскости  $c_r, c_i$ .

Обратимся к уравнению задачи о баротропной неустойчивости с однородными граничными условиями

$$\Psi'' - \left[ k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] \Psi = 0. \quad (2.13)$$

Спектр этой задачи подробно исследован Куо (*Куо, 1949*). Впоследствии были получены решения для некоторых других профилей, помимо струеобразного профиля и профиля слоя смешения, исследованных Куо. (Этот ис-

следователь китайского происхождения, живущий и работающий в США, широко известен как Куо; произношение его имени – Го Сяолань.)

Куо показал, что в данной задаче отсутствуют несингулярные волны, обгоняющие поток, т. е. волны с фазовыми скоростями  $c > u_{\max}$ , но существуют волны, бегущие против потока. Простейшая формула для их фазовых скоростей получается при замене  $u(y)$  его средним значением  $U$  и при условии, что  $\Psi$  не зависит от  $y$ , тогда из уравнения получаем (сокращая  $\Psi$ , поскольку  $\Psi$  не равно тождественно нулю, и считая  $\Psi''$  и  $u''$  равными нулю):

$$k^2 = \frac{\beta}{U - c}; \quad c = U - \frac{\beta}{k^2}. \quad (2.14)$$

Это соотношение, связывающее фазовую скорость с параметрами  $\beta$  и  $k$ , называется **дисперсионным соотношением**.

Определяемые полученным дисперсионным соотношением волны известны как **баротропные волны Россби**. Важно, что они бегут против потока и что их спектр непрерывен. Кроме того, их амплитуда  $\Psi$  не зависит от поперечной координаты  $y$ .

Другой частный случай несингулярных волн – **волны Гаурвица**. Их мы получаем при  $\bar{u} = \text{const}$  и

$$\Psi = A \sin \frac{\pi y}{2b}, \quad (2.15)$$

где  $b$  – полуширина зональной полосы, в которой рассматривается основной поток. Подставляя эти величины в уравнение, получаем дисперсионное соотношение

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2 + \frac{\pi^2}{4b^2}}. \quad (2.16)$$

Волны Гаурвица также бегут против потока. Они характеризуются синусоидальной зависимостью амплитуды меридиональной составляющей скорости ( $v'$ ) от поперечной координаты в пределах широтной полосы  $(-b, b)$ . Амплитуда зональной составляющей  $u'$  зависит от поперечной координаты  $y$  как  $\cos(\pi y / 2b)$ , т. е. имеет максимум в середине полосы и равна нулю на ее границах.

Несингулярные нейтральные волны не получают энергии от зонального потока; они могут в нем существовать теоретически сколь угодно долго, если были внесены в этот поток от какого-либо источника, например при обтекании препятствия.



Волны Россби и Гаурвица представляют собой длинные волны на баротропном зональном потоке. Их длины порядка 5000 км и более. В реальной атмосфере не реализуются в точности условия, при которых получены дисперсионные соотношения для волн Россби и Гаурвица. Однако в ряде случаев реальные потоки достаточно близки к идеализированным, для которых эти дисперсионные соотношения получены, так что волны Россби и Гаурвица оказываются хорошо описывающими реальные атмосферные длинные волны, бегущие против потока.

Обратимся к неустойчивым и нейтральным волнам.

Во всех линейных задачах об устойчивости выводится необходимое условие существования неустойчивых возмущений.

В данном случае это необходимое условие состоит в выполнении равенства:

$$\beta - \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = 0. \quad (2.17)$$

Физически это означает, что производная по широте от абсолютного вихря  $(-du/dy + f)$  должна обращаться в нуль (менять знак) где-либо внутри широтной полосы.

Действительно, абсолютный вихрь в баротропном зональном потоке будет

$$\left( \frac{d\bar{v}}{dx} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + f \right) = -\frac{d\bar{u}}{dy} + f, \quad (2.18)$$

а его производная по  $y$ :

$$-\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \beta. \quad (2.19)$$

Выполнение необходимого условия неустойчивости указывает только на возможность существования неустойчивых мод. Напротив, условие необращения в нуль и постоянства знака производной абсолютного вихря по широте является достаточным условием устойчивости данного потока.

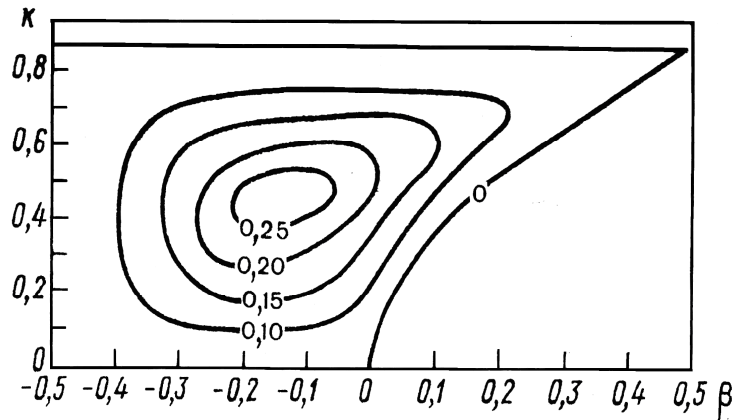
Имеются аналитические решения для наиболее характерных меридиональных профилей  $\bar{u}(y)$ . Приведем классические результаты Куо для зональной струи:

$$\bar{u}(y) = \frac{1 + \cos y}{2}, \quad -\pi < y < \pi. \quad (2.20)$$

Для такого потока существует интервал неустойчивости, причем неустойчивые волны существуют в интервале между двумя сингулярными нейтральными волнами, у одной из которых критический уровень находится в точке, где выполняется необходимое условие неустойчивости, а второй – на границе, где он отделяет интервал фазовых скоростей неустойчивых волн от ин-

тервала несингулярных мод Россби-Гаурвица. В промежутке расположены фазовые скорости неустойчивых волн.

Показатели роста представлены на рис. 2.2.



**Рис. 2.2.** Изолинии показателей роста  $kc_i$  баротропно-неустойчивых волн в плоскости безразмерных  $\beta, k$  при  $\bar{u} = \frac{1}{2}(1 + \cos y)$ , по (Кио, 1973).

Здесь по оси  $x$  отложено безразмерное  $\beta$ , по оси  $y$  – безразмерное  $k$ . Отрицательные  $\beta$  соответствуют потоку с востока на запад ( $U$  – скорость на оси струи;  $L$  – ее полуширина). В восточном потоке показатели роста и длина неустойчивых волн больше, чем в западном. Отрицательные  $\beta$  соответствуют южному полушарию, где при оси  $y$ , направленной на север, производная  $df/dy$  отрицательна.

Рассмотрим приведенный рисунок. Здесь проведены изолинии  $kc_i$ , амплитуда волны будет расти как  $\exp(kc_it)$ . Все величины здесь безразмерные. Для этого процесса характерное время можно определить как

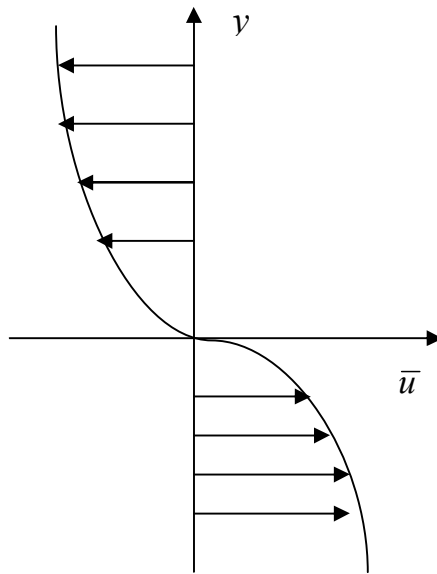
$$T = \frac{L}{U}.$$

Безразмерное время будем измерять в единицах характерного времени. Внутренняя замкнутая изолиния на рисунке –  $kc_i = 0,25$ , что близко к максимальному показателю роста. При  $t = 0 \exp(kc_it) = 1$ , а при  $t = 4 \exp(kc_iT) = e$ . Таким образом, за четыре характерных времени возмущение возрастет в  $e$  раз.

Скорость роста возмущений измеряется через время удвоения амплитуды, но чаще (и это удобнее) – через **время роста амплитуды в  $e$  раз** ( $e$ -folding time). В данном случае это  $4T$ .

Пусть  $L = 500$  км (ширина зональной полосы),  $U = 10$  м/с. Тогда  $T \approx 15$  ч. Итак, за 60 ч, или 2,5 суток, амплитуда возмущения может вырасти в  $e$  раз.

Длина наиболее неустойчивой волны при этом около 6 тыс. км. Такая оценка получается следующим образом. Безразмерное волновое число  $k$ , соответствующее максимуму показателя роста, как видно на рис. 2.2, близко к 0,5.



**Рис. 2.3.** Профиль типа «слоя смещения»:  $\bar{u} = -thy$ .

Поскольку  $k = 2\pi / \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны, то безразмерная длина наиболее неустойчивой волны равна  $\lambda = 2\pi / 0,5 = 4\pi$ . Умножая на  $L$ , получаем размерную длину волны около 6 тыс. км.

Еще один пример решения задачи об устойчивости баротропного зонального потока. Если первый пример воспроизводил ситуацию с зональным струйным течением средних широт, то для тропиков более характерен профиль перехода от восточного переноса к западному. Во внутритропической зоне конвергенции (ВЗК) ветер распределен так: к северу от ВЗК он восточный, к югу – западный. Этот тип профиля аппроксимируется функцией  $\bar{u} = -thy$  (рис. 2.3).

Ширина переходной зоны  $d$  – порядка 150 км. Решение для этого случая при  $\beta_0 > 0$  получил Lipps (Lipps, 1962) для показателей роста. Сингулярные нейтральные волны найдены Куо. Это также две волны, ограничивающие область неустойчивости. Масштаб скорости  $U$  выбран равным половине перепада скоростей на расстоянии  $d$ . С ростом  $\beta$  максимальный показатель роста смещается в сторону более коротких волн. При  $U = 7$  м/с длина наиболее неустойчивой волны порядка 3000 км, время роста амплитуды в  $e$  раз – порядка 2-х суток.

Таким образом, баротропные волны – и нейтральные несингулярные, и неустойчивые – это достаточно длинные волны. Их длина варьирует в зависимости от параметров потока.

Обратим внимание на то, что области неустойчивости на рис. 2.2 и 2.4 ограничены изолинией  $c_i = 0$ : это граница области неустойчивости, состоящая из собственных чисел, соответствующих нейтральным сингулярным волнам.

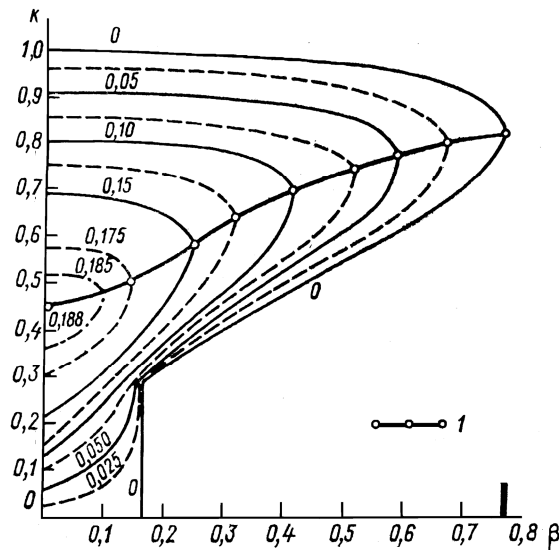
Заметим еще, что на диаграммах устойчивости мы видим довольно широкие интервалы  $k$  и  $\beta$ , в которых волны неустойчивы. Однако физическое значение имеет только наиболее неустойчивая волна, потому что она растет быстрее всех и вскоре подавит все другие неустойчивые моды. Они хотя и будут существовать и как-то менять структуру развивающегося возмущения, но их влияние будет второстепенным из-за малых скоростей роста.

Поэтому неустойчивое возмущение будет иметь структуру, близкую к структуре наиболее неустойчивой нормальной моды.

Какие атмосферные объекты развиваются из баротропно-неустойчивых возмущений?

Это крупномасштабные ложбины и гребни, циклоны и антициклоны, муссонные депрессии, стратосферные возмущения и центры действия атмосферы. В образовании всех этих объектов баротропная неустойчивость западных зональных потоков играет большую роль.

Потоки типа слоя смещения, характерные для ВЗК, могут порождать неустойчивые возмущения, играющие роль начальных вихрей для развития тропических циклонов.



**Рис. 2.4.** Изолинии показателей роста  $kc_i$  баротропно-неустойчивых волн в плоскости безразмерных  $\beta$ ,  $k$  при  $\bar{u} = -thy$ , по (Kuo, 1973).

Потоки типа слоя смешения, характерные для ВЗК, могут порождать неустойчивые возмущения, играющие роль начальных вихрей для развития тропических циклонов.

Влияние баротропной неустойчивости в атмосфере проявляется преимущественно на масштабах общей циркуляции атмосферы. Однако движения малых масштабов также могут быть баротропно-неустойчивыми. Имеются работы, в которых, в частности, показано, что в вихре типа торнадо – мелко-масштабном вихре с большими скоростями вращения и большими радиальными градиентами тангенциальной скорости, – азимутальные неоднородности, развивающиеся во вторичные множественные торнадо, могут возникать в результате баротропной неустойчивости.

### **Фундаментальные особенности задач об устойчивости на примере задачи Рэлея**

При анализе задачи о баротропной неустойчивости мы познакомились с основными понятиями линейной теории неустойчивости:

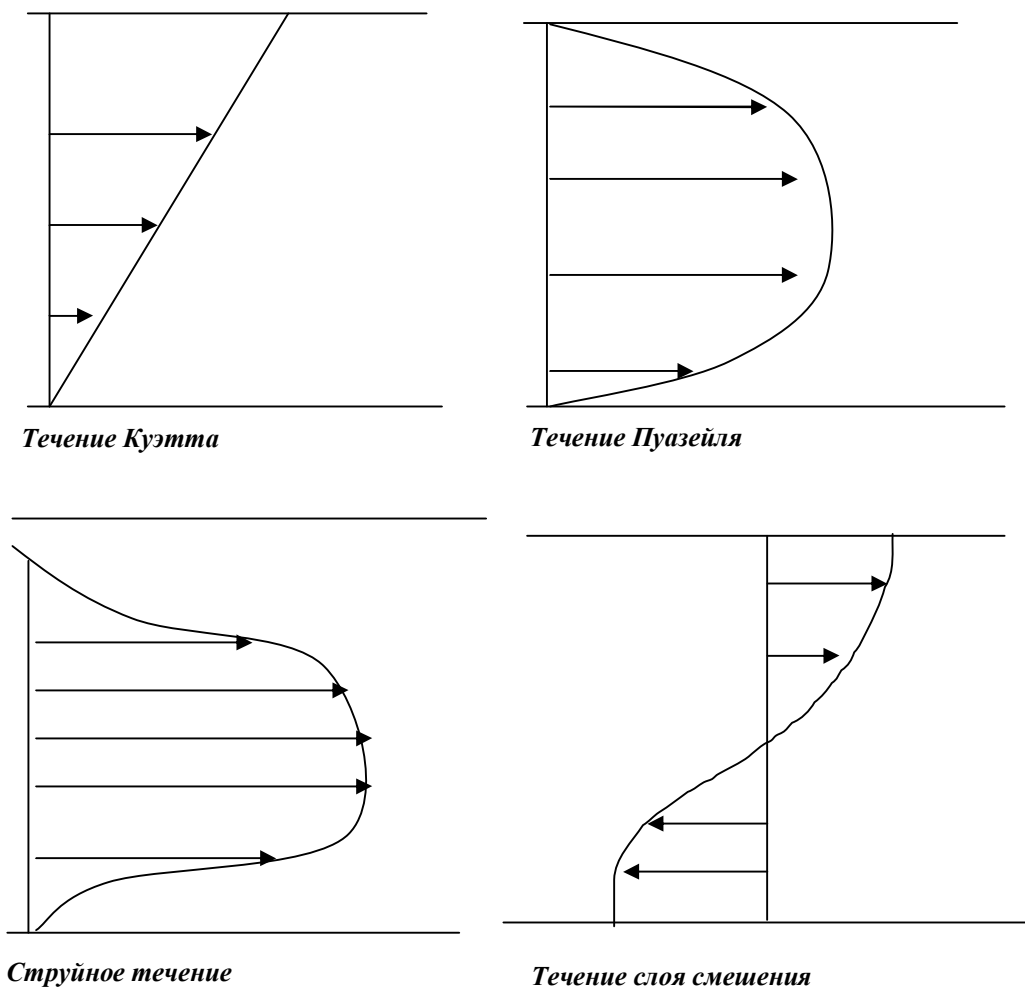
- задача на собственные значения (фазовой скорости или показателя роста);
- спектр собственных значений;
- дисперсионное соотношение;
- несингулярные нейтральные волны, в частности волны Россби и Гаурвица, бегущие против потока;
- необходимое условие неустойчивости (и достаточное условие устойчивости);
- сингулярные нейтральные волны, образующие границу области неустойчивости;
- критический уровень сингулярных волн;
- время роста амплитуды в  $e$  раз;
- наиболее неустойчивая волна;
- диаграмма устойчивости в плоскости параметров задачи (в данном случае  $\beta$  и  $k$ ).

Все эти понятия являются фундаментальными для теории неустойчивости. Они были введены еще Рэлеем (*Rayleigh, 1880*) при исследовании задачи, которая теперь называется задачей Рэлея и которая отличается от задачи о баротропной неустойчивости зонального потока на  $\beta$ -плоскости тем, что в ней  $\beta = 0$ . При этом условии из уравнения задачи о баротропной неустойчивости получаем уравнение Рэлея

$$\Psi'' - \left[ k^2 + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] \Psi = 0,$$

а необходимое условие неустойчивости будет:  $\bar{u}'' = 0$  где-либо в потоке. Иначе говоря, неустойчивыми будут потоки с точкой перегиба профиля скорости, а устойчивыми – потоки без точки перегиба. Этот результат известен как теорема Рэлея. Выведенное нами выше условие неустойчивости баротропного зонального потока представляет собой аналог теоремы Рэлея для этого случая.

На рис. 2.5 показаны наиболее часто рассматриваемые профили скорости. Течения Куэтта и Пуазейля устойчивы согласно теореме Рэлея, а струйное течение и течение типа слоя смешения – неустойчивы.



**Рис. 2.5.** Примеры профилей скорости, устойчивых согласно теореме Рэлея (течения Куэтта и Пуазейля) и неустойчивых (струйное течение, слой смешения).

Такой результат имеет место в рамках задачи Рэлея, т. е. в невязкой и безразлично стратифицированной жидкости (или газе). В реальных жидкостях существует вязкость, и их турбулизация происходит не совсем так, как это следует из задачи Рэлея. Чем более вязкая жидкость, тем больше и отличия. С одной стороны, вязкость играет стабилизирующую роль, с другой – она приводит иногда к появлению неустойчивости таких потоков, которые по теореме Рэлея устойчивы.

Если вязкостью не пренебрегать, то вместо уравнения Рэлея получаем так называемое уравнение Орра-Зоммерфельда (4-го порядка):

$$w'' - \left[ k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{u}''}{\bar{u} - c} \right] w = - \frac{i\nu}{k(\bar{u} - c)} \left[ w^{\text{IV}} - 2w''k^2 + k^4 w \right].$$

О роли вязкости можно сказать следующее. Если уравнение невязкой задачи обнаруживает неустойчивость, то и в вязком приближении поток оказывается неустойчивым. Обратное неверно: в случаях, если невязкое рассмотрение приводит к выводу об устойчивости потока, не исключено, что вязкое рассмотрение обнаружит неустойчивость. Так, течение Пуазейля в вязком приближении неустойчиво.

Для задач о неустойчивости атмосферных потоков роль вязкости пренебрежима (кроме задач о конвективной неустойчивости, а также задач о неустойчивости движений самых мелких масштабов, которыми никто в метеорологии не занимается). Более важную роль играют силы Кориолиса и плавучести.

## Теоремы Сквайра и Говарда

Рассмотрением этих теорем мы продолжим краткий обзор результатов анализа задачи Рэлея. Хотя сама по себе, по своему физическому смыслу, эта задача не представляет для нас интереса, потому что погодообразующих процессов она не описывает, однако основные закономерности поведения неустойчивых возмущений она обнаруживает, и эти закономерности, с определенными видоизменениями, остаются в силе и для атмосферной неустойчивости.

Мы уже видели, что необходимое условие неустойчивости в задаче Рэлея  $\bar{u}'' = 0$ ,  $y = y_k$  – условие смены знака кривизны профиля ветра (условие наличия точки перегиба профиля) – в случае баротропной неустойчивости превращается в

$$\beta - \bar{u}'' = 0, y = y_k.$$

Аналогичные формулировки мы получаем для других видов неустойчивости, как будет показано позже.

Упомянем и другие общие положения, которые имеют аналоги в других задачах об устойчивости. Прежде всего, обратим внимание на **теорему Сквайра** (*Squire, 1933*):

**Если имеется трехмерное волновое возмущение, т. е. нормальная мода, распространяющаяся под углом к основному потоку, то всегда существует двумерное возмущение, растущее быстрее этого трехмерного.**

Доказательства приводить не будем, хотя оно простое. Физический смысл этого утверждения следующий.

В общем виде нормальные моды задачи Рэлея (а также и задачи Куо о баротропной неустойчивости) следует представлять в виде

$$\Psi(y)e^{ikx+ily+i\omega t}.$$

На предыдущей лекции мы представляли их в виде  $\Psi(y)e^{ikx+i\omega t}$ , или, вводя фазовую скорость:

$$\Psi(y)e^{ik(x-ct)}. \quad (2.21)$$

Таким образом, мы полагали волновое число  $l$  по оси  $y$  равным нулю. Однако тем самым мы, вообще говоря, умаляли общность рассмотрения. На самом деле, мы при этом опирались на теорему Сквайра, которая имеет место и для задачи Рэлея, и для задачи Куо: если имеются неустойчивые моды с  $l \neq 0$ , то имеются и более неустойчивые (с большим  $kc_i$ ) моды, у которых  $l = 0$ , т. е. такие, у которых фронт волны перпендикулярен основному потоку. Фронтом волны мы называем здесь линию постоянной фазы, например ось гребня или ось ложбины. Физическая фаза волны в представлении (2.21) равна  $\varphi = kx - c_r t$ , и прямые  $\varphi = \text{const}$  в плоскости  $x, y$  будут параллельны оси  $y$  и будут смещаться со временем в сторону больших  $x$  при  $c_r > 0$  и в сторону малых  $x$  (против потока) при  $c_r < 0$ .

Поэтому во всех задачах об устойчивости надо сначала проверить, имеет ли место теорема Сквайра, и если да, то сразу упростить задачу, положив  $l = 0$ . Ведь нас интересует только наиболее неустойчивая волна, поскольку со временем она подавит все остальные.

**Теорема Говарда** указывает на геометрическое место комплексных  $c$ . Первым в этом направлении продвинулся Рэлей, указавший геометрическое место точек, соответствующих фазовым скоростям неустойчивых волн. Он показал, что эти точки лежат внутри интервала скоростей основного потока: если  $c_i \neq 0$ , то

$$\bar{u}_{\min} \leq c_r \leq \bar{u}_{\max}.$$

Говард (*Howard, 1961*) доказал более сильное утверждение:



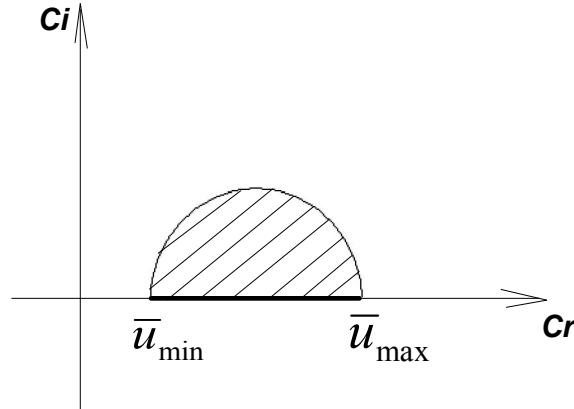
В комплексной плоскости  $c$  все собственные значения задачи Рэлея, если они существуют, лежат внутри полукруга (рис. 2.6), диаметром которого является интервал  $(\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max})$ .

Таким образом, можно оценить верхний предел возможных показателей роста. В различных задачах об устойчивости атмосферных течений теорема Говарда имеет место в определенным образом модифицированном виде. Так, для баротропного потока на  $\beta$ -плоскости теорема о полукруге имеет место, но диаметр полукруга несколько расширяется по сравнению с задачей Рэлея и равен

$$D = \bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} + \beta F,$$

где  $F$  – положительная величина, зависящая от  $k$  и от скорости основного потока.

Для потоков на  $f$ -плоскости теорема Говарда сохраняется в том же виде, что и для задачи Рэлея. Это не значит, однако, что весь полукруг заполнен собственными числами с  $c_i \neq 0$ . Это значит только, что все комплексные собственные числа, какие существуют, будут лежать в этом полукруге, а вне его комплексных  $c$  нет. Точно так же нельзя думать, что весь интервал скоростей основного потока заполнен нейтральными сингулярными волнами, и все они лежат на границе устойчивости, т. е. в их окрестности есть комплексные  $c$ .



**Рис. 2.6.** Полукруг в плоскости  $(c_r, c_i)$ , в котором лежат комплексные фазовые скорости задачи Рэлея («теорема Говарда о полукруге»).

Перейдем к основной для нас задаче – к задаче о бароклинной неустойчивости.

### Бароклинная неустойчивость зональных потоков на $f$ -плоскости: простейшая модель циклогенеза (модель Иди)

Впервые такая задача была поставлена и решена английским метеорологом Eady в 1949 г. Полученное решение известно как модель Иди.

Основной поток считается геострофическим, гидростатическим, постоянным по направлению и имеющим постоянный вертикальный сдвиг скорости:

$$\bar{u} = \bar{u}(z), \quad \frac{d\bar{u}}{dz} = \text{const}. \quad (2.22)$$

Поток ограничен жесткими стенками при  $z = \pm H/2$ , но не ограничен по горизонтали. Вязкость и теплопроводность не учитываются. На верхней и нижней границах ставится условие непротекания в виде условия затухания вертикальной скорости возмущения ( $w' = 0$ ).

Поскольку возмущения рассматриваются в плоскости  $x, z$  и зависят от этих координат и времени, то, в отличие от баротропной задачи, имеют место не только возмущения скорости и давления, но и температуры, а в систему уравнений войдет и уравнение притока тепла для адиабатического процесса. Температура невозмущенного потока зависит от высоты и поперечной координаты:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(y, z), \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \text{const}, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \text{const}. \quad (2.23)$$

Зависимость  $\theta$  от  $y$  определяется соотношением термического ветра.

Система уравнений относительно возмущений будет, после линеаризации и принятия приближения Буссинеска

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{u}}{dz} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + fv', \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} - fu', \\ -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\theta' g}{\bar{\theta}} &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Коэффициенты этой системы зависят от  $z$ , и решение можно искать в виде нормальных мод (теорема Сквайра выполняется):

$$S' = \hat{S}(z)e^{ikx+i\omega t} = \hat{S}(z)e^{ik(x-ct)}, \quad (2.25)$$

где  $S' = \{u', v', w', \theta', P'\}$ .

После подстановки в систему уравнений (2.24) выражений для  $S'$  в виде нормальных мод и выполнения преобразований с целью исключения всех неизвестных амплитудных функций, кроме  $\hat{w}$ , получаем после некоторых упрощений:

$$\hat{w}'' - \frac{2\bar{u}'\hat{w}'}{\bar{u} - c} - \frac{k^2 N^2}{f^2} \hat{w} = 0. \quad (2.26)$$

Граничные условия:  $w = 0$ ,  $z = \pm H/2$ .

Здесь в уравнении появляется частота Брента-Вяйсяля:

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (2.27)$$

Если перейти в уравнении к безразмерным величинам, то появляется характерное число Ричардсона

$$Ri = \frac{N^2 H^2}{U^2}. \quad (2.28)$$

Решение этой задачи, полученное впервые Иди, довольно сложное. Оно приводится полностью в рекомендованных монографиях (Шакина, 1985, 1990). Мы здесь остановимся только на результатах.

Необходимое условие неустойчивости для этой задачи аналогично задаче Рэлея (производная завихренности обращается в нуль где-либо в области) и выполняется всегда, т. е. бароклинный поток на  $f$ -плоскости всегда неустойчив. Выполняется и теорема о полукруге.

Если скорость основного потока меняется от  $\bar{u}_{\min}$  до  $\bar{u}_{\max}$ , то у задачи на собственные значения, сформулированной выше, найдены неустойчивые решения, которым соответствуют

$$c_r = \frac{\bar{u}_{\min} + \bar{u}_{\max}}{2}, \quad (2.29)$$

$$c_i = c_i(f, H, \bar{u}', N^2),$$

причем зависимость  $c_i$  от своих аргументов не выражается простой формулой.

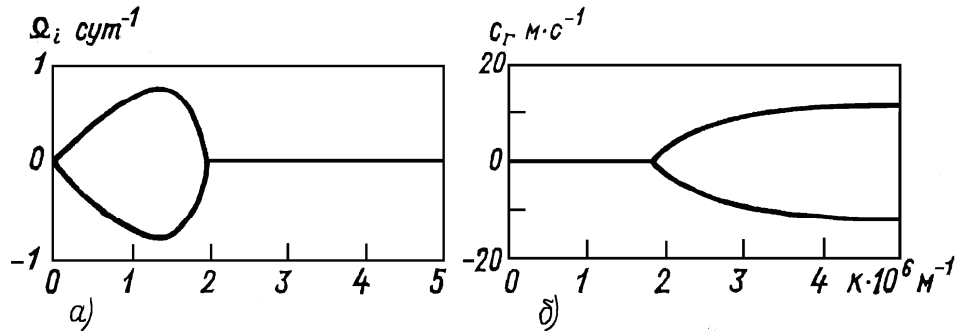
Первое из этих соотношений показывает, что неустойчивые волны распространяются с фазовой скоростью, равной средней скорости невозмущенного потока или, что то же самое при  $\bar{u}' = \text{const}$  со скоростью невозмущен-

ного потока на среднем уровне рассматриваемого слоя. Этот уровень был назван **уровнем ведущего потока (steering level)**.

Второе соотношение (2.29) определяет  $c_i$  таким образом, что начиная с определенного  $k = k_c$ , зависящего от остальных параметров, будет  $c_i = 0$ , а от  $k = 0$  до  $k = k_c$  наблюдается сначала рост  $c_i$  от 0 до некоторого максимума, а затем убывание (рис. 2.7). Таким образом, на определенном интервале длин волн, от самых длинных до

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c},$$

имеет место рост возмущений, причем одна из неустойчивых волн имеет максимальный показатель роста, т. е. является наиболее неустойчивой. Эта наиболее неустойчивая волна найдена в работе Иди аналитически (амплитудная функция и длина). Решения получены для потока, неограниченного в поперечном направлении, и для ограниченной широтной полосы. Очевидно, что и то, и другое нефизично применительно к реальной атмосфере, поскольку допущение  $f = \text{const}$  пригодно только в узком интервале широт. Тем не менее, полученные решения имеют многие характерные черты атмосферных возмущений: гребней и ложбин, молодых циклонов и антициклонов.



**Рис. 2.7.** Показатель роста  $\Omega_i = -kc_i$  (а) и фазовая скорость  $c_r$  относительно потока на среднем уровне (б) волн Иди в зависимости от горизонтального волнового числа  $k$  при значениях параметров, характерных для тропосферы средних широт ( $H = 10^4$  м;  $\bar{u}' = 4 \cdot 10^{-3}$  с $^{-1}$ ;  $L = 6 \cdot 10^6$  м) по (Eady, 1949).

При  $k = k_c$  показатель роста обращается в нуль: это так называемое **коротковолновое отсечение неустойчивости (short wave cut-off)**. Все волны, более короткие, чем  $\lambda_c = 2\pi / k_c$ , могут быть только нейтральными. Они не получают энергии от основного потока. На рис. 2.7 показаны фазовые скорости двух таких волн, лежащие внутри интервала изменения скорости основ-

ного потока. Несингулярные волны, внешние по отношению к интервалу  $(\bar{u}_{\min}, \bar{u}_{\max})$ , в данной задаче отсутствуют. Как мы увидим, они появляются в задаче о бароклинной неустойчивости на  $\beta$ -плоскости.

Итак, наиболее быстро растущими волнами в потоке с постоянным вертикальным сдвигом ветра в ограниченном слое будут волны, не зависящие от поперечной к потоку горизонтальной координаты (в силу теоремы Сквайра) и представляющие собой чередующиеся гребни и ложбины с осями, перпендикулярными основному потоку. Чем меньше сдвиг ветра, тем слабее неустойчивость (меньше показатели роста). При некотором малом сдвиге ветра неустойчивость исчезает, хотя ее необходимое условие выполняется.

Посмотрим, как зависят от высоты и от параметров задачи амплитудные функции не только  $w'$ , но и остальных возмущений: составляющих скорости  $u'$ ,  $v'$ , давления и потенциальной температуры:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \frac{\hat{w}'f}{k^2(\bar{u}-c)}, \quad \hat{u} = -\frac{\hat{w}}{ik}, \quad \frac{\hat{P}}{\bar{\rho}} = \frac{if^2\hat{w}'}{k^3(\bar{u}-c)}, \\ \frac{\hat{\theta}}{\bar{\theta}} &= \frac{iN^2\hat{w}}{gk(\bar{u}-c)} + \frac{if^2\bar{u}\hat{w}'}{gk^3(\bar{u}-c)^2}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

При действительных  $c$  коэффициенты уравнения относительно  $\hat{w}$ :

$$\hat{w}'' - \frac{2\bar{u}'\hat{w}'}{\bar{u}-c} - \frac{k^2N^2}{f^2}\hat{w} = 0 \quad (2.31)$$

действительны, а значит и решение,  $\hat{w}$ , действительно. Остальные амплитудные функции будут либо чисто действительными, либо чисто мнимыми. Представим любое комплексное число в виде:

$$a + bi = ei^{\arctg \frac{b}{a}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Величина  $\sqrt{a^2 + b^2}$  называется модулем комплексного числа, а  $\arctg \frac{b}{a}$  — его аргументом. У чисто действительного числа аргумент равен нулю или  $\pi$  (для положительных и отрицательных чисел соответственно), у чисто мнимых  $\pi/2$  или  $-\pi/2$ .

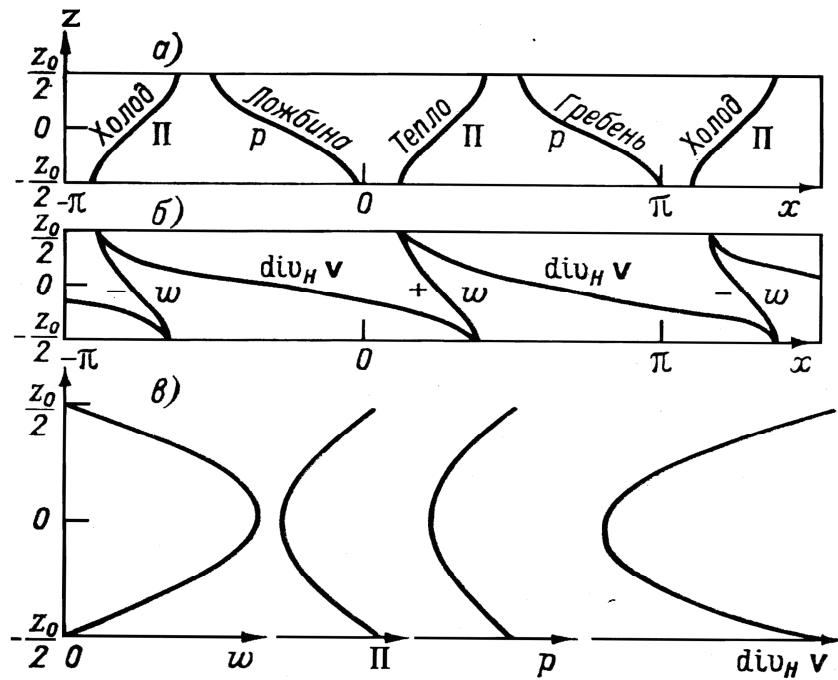
Поэтому у нейтральных волн возмущения  $u'$ ,  $P'$ ,  $\theta'$  будут сдвинуты по фазе относительно  $w'$  на  $\pi/2$ , но фазы каждой компоненты будут независимы от  $z$ .

Если же  $c$  комплексное, то тогда в уравнении можно разделить действительную и мнимую части и найти их порознь. Решение будет

$$\hat{w}(z) = \hat{w}_r(z) + i\hat{w}_i(z) = |\hat{w}(z)|e^{i\arctg \frac{\hat{w}_i}{\hat{w}_r}}.$$

Именно такая фаза, зависящая от  $z$ , добавится в показатель экспоненты нормальной моды. Тогда, кроме того сдвига фаз, который постоянен по высоте и определяется коэффициентами в формулах для амплитудных функций, мы получим зависящий от высоты сдвиг фаз возмущений всех величин. Этот сдвиг фаз определяет смещение ложбин и гребней в полях вертикальной скорости относительно возмущений температуры и давления, сходное с тем, какое мы можем наблюдать и на картах барической топографии.

На рис. 2.8 показано изменение фаз и амплитуд бароклинно-неустойчивых волн по высоте.



**Рис. 2.8.** Изменения фазы бароклинно-неустойчивых возмущений давления ( $p$ ), энтропии ( $\Pi$ ), вертикальных движений ( $w$ ) и дивергенции ( $\text{div}_H \mathbf{v}$ ) в плоскости  $x, z$  (а, б) и распределение их амплитуд (абсолютных величин амплитудных функций) по высоте (в) в горизонтальном слое толщиной  $z_0$ , по (Eady, 1949).

В частности, фаза отклонений давления от его значений в невозмущенном потоке и фаза отклонений энтропии  $\Pi$

$$\Pi = \int \frac{d\theta}{\theta}$$

распределены таким образом, что минимум давления у земли (ось ложбины) находится несколько позади гребня тепла у земли. С высотой ось ложбины смещается в сторону минимальных  $\Pi$ , так что на верхней границе ложбина давления является холодной: ось холода проходит лишь несколько позади оси наименьших  $p$ . Точно так же гребень давления является холодным у земли и теплым на верхней границе слоя. Фаза вертикальных движений меняется по высоте таким образом, что максимальное восхождение в нижнем слое наблюдается в передней части ложбины. На среднем уровне, где вертикальные движения максимальны, ось восхождения располагается на  $1/8$  длины волны впереди оси приземной ложбины. Отметим также, что на среднем уровне  $w'$  и  $\Pi$  синфазны: теплый воздух поднимается, а холодный опускается.

В результате потенциальная энергия системы служит источником кинетической энергии возмущений, которая за этот счет возрастает.

Показатели роста и длины неустойчивых волн Иди согласуются с соответствующими величинами, характерными для атмосферных возмущений синоптического масштаба.

Так, если взять  $H = 10$  км (характерная толщина тропосферы), то получаем максимальный показатель роста, соответствующий времени роста амплитуды в  $e$  раз, равным 1,6 суток. Длина наиболее неустойчивой волны при характерной разности скоростей основного потока на границах, равной 30 м/с, получается близкой к 5000 км. Это характерный размер циклонов и антициклонов, захватывающих мощные слои воздуха, сравнимые с толщиной тропосферы. Если же положить, что вертикальная мощность возмущенного слоя меньше толщины тропосферы, допустим 3 км, то получим длину наиболее неустойчивой волны около 1600 км. Действительно, синоптические возмущения таких размеров, характерных для волн на фронтах, не бывают сильно развиты по вертикали.

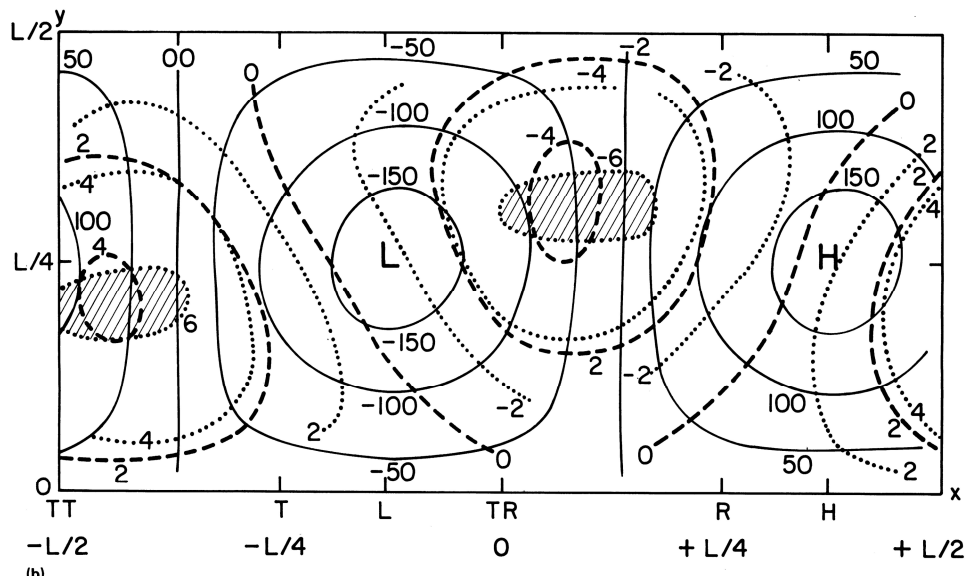
Вариант задачи, в котором решение ищется в ограниченной широтной полосе (причем ставится условие  $v' = 0$  на боковых стенках), приводит к решению, вполне аналогичному только что описанному для неограниченного слоя (рис. 2.9).

В работе Иди получено аналитическое решение и для двухслойного потока: нижний слой – тропосфера – менее статически устойчив, чем верхний (стратосфера) и простирается до подвижной внутренней границы (тропопаузы). Верхний слой более устойчив и имеет бесконечную протяженность. Ставится условие затухания  $w'$  на земле и при  $z \rightarrow \infty$ .

Отличия решения двухслойной задачи от основного решения для волн Иди состоят в том, что неустойчивые волны смещаются с фазовой скоростью, отличной от скорости ветра на среднем уровне в тропосфере, и эти отличия зависят от стратификации в стратосфере и от сдвига ветра. Уровень ведущего потока теперь тоже отличается от середины слоя.

При возрастании статической устойчивости в стратосфере соотношения для двухслойной модели стремятся к соответствующим соотношениям для однослойной модели с жесткой верхней границей. Если же отношение чисел Ричардсона в тропосфере и стратосфере близко к единице, то возмущения постепенно проникают в верхний слой, где и затухают с высотой.

В двухслойной модели при устойчивой стратосфере сохраняется коротковолновое отсечение и имеется максимум показателя роста, но он меньше, чем в однослойной модели.



**Рис. 2.9.** Высоты изобарической поверхности 1000 гПа (сплошные линии, оцифрованные в метрах), изаллобары у земли (пунктирные линии, гПа/с) для модели Иди в ограниченной широтной полосе. По осям  $x$  и  $y$  отложена длина волны  $L$  при ее характерном значении 3500 м, по (Carlson, 1991).

Распределение фаз и амплитуд неустойчивых волн в двухслойной модели характеризуется постоянством по высоте фаз возмущений в стратосфере, тогда как в тропосфере соотношения фаз и их изменения по высоте такие же, как в однослойной модели.

Таким образом, при высокой, в сравнении с тропосферой, устойчивости в стратосфере возмущения сосредотачиваются в тропосфере и мало зависят от стратификации в вышележащем слое, так что их поведение в первом приближении можно описать однослойной моделью.

Замечательно, что при равенстве чисел Ричардсона в тропосфере и в стратосфере неустойчивых возмущений нет вообще:  $c_i = 0$  везде. Таким образом,



в бесконечном по вертикали слое с постоянным сдвигом ветра неустойчивых бароклинных волн не существует.

Для развития бароклинной неустойчивости в тропосфере необходимо наличие верхней границы бароклинного слоя (либо в виде жесткой стенки, либо в виде тропопаузы, отделяющей бароклинный слой от более устойчивой стратосферы).

### **Бароклинная неустойчивость на $\beta$ -плоскости. Волны Чарни и Грина**

Задача о бароклинной неустойчивости, поставленная и частично решенная Чарни (*Charney, 1947*), является более сложной в сравнении с задачей Иди: в ней учтена зависимость силы Кориолиса от широты в простейшем (линейном) варианте, т. е.  $\beta$ -эффект, и не принимается приближение Буссинеска, что означает более полный учет эффекта сжимаемости. Указанные обстоятельства ведут к существенному усложнению задачи. Для чего это было сделано?

Напомним, что дифференцирование уравнения статики дает соотношение

$$\frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} g + \frac{g \Delta P}{\bar{\rho} k R \bar{T}}. \quad (2.32)$$

Здесь вместо скорости звука, как мы писали выше, записано  $c_S^2 = k R \bar{T}$ . Найдем отношение членов правой части:

$$\frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \frac{\bar{\rho} k R \bar{T}}{\Delta P} = \frac{\Delta \theta}{\bar{\theta}} \frac{k \bar{P}}{\Delta P}.$$

Если рассматриваются небольшие толщины слоев, то второй член (2.32) пренебрежим в сравнении с первым, и можно принять приближение Буссинеска. При больших толщинах слоев член с  $\Delta P$  оказывается большим, и это приближение становится некорректным; Чарни, желая рассматривать слои большой толщины, включил в рассмотрение член с  $\Delta P$ .

В задаче Иди, как мы видели, приближение Буссинеска принимается, и при этом рассматривается даже двухслойная модель (тропосфера плюс стратосфера). Это не вполне корректно. Более простая, приближенная модель Иди благодаря своей простоте позволяет получить более прозрачное аналитическое решение и при этом увидеть основные черты явления, которые, как мы видели, обнаруживаются несмотря на приближение Буссинеска, а значит – определяются не эффектами сжимаемости, а наличием бароклинности и силы Кориолиса. Можно ожидать, что модель Чарни даст более физичные результаты.

Работа Чарни появилась раньше работы Иди, однако в ней не было получено полного решения, которое бы удовлетворило ученых. Поэтому Иди

предложил свою модель, пусть приближенную в сравнении с Чарни, но очень наглядную и впервые показавшую, что бароклинно-неустойчивые волны имеют основные свойства реальных атмосферных возмущений синоптического масштаба.

Посмотрим, что нового дает учет  $\beta$ -эффекта и сжимаемости воздуха.

Запишем уравнения модели Чарни относительно возмущений, линеаризованные относительно основного потока  $\bar{u}(z)$ ,  $\bar{P}(z, y)$ ,  $\bar{\theta}(z, y)$ ,  $\bar{\rho}(z, y)$ .

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + f v', \\
\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f u', \\
0 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}, \\
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \bar{\rho} \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Чарни сразу заменяет первое уравнение на условие геострофичности  $v'$ . На самом деле это упрощение имеет место и в модели Иди, но там оно вводится не на стадии записи уравнений относительно возмущений, а на стадии вывода формул для амплитудных функций. Выражение для  $\hat{v}$  он соответствующим образом упрощает.

Уравнение неразрывности записано здесь с учетом сжимаемости.

Возмущения составляющих скорости считаются не зависящими от  $y$ :

$$\{u', v', w'\} = \{\bar{u}(z), \hat{v}(z), \bar{w}(z)\} e^{ik(x-ct)}. \tag{2.34}$$

Возмущения давления и плотности зависят также и от  $y$ :

$$\{P', \rho'\} = \{\bar{P}(z, y), \bar{\rho}(z, y)\} e^{ik(x-ct)}. \tag{2.35}$$

Возмущения потенциальной температуры также должны зависеть от  $y$  в силу уравнения состояния.

Опуская сложный вывод уравнения относительно  $\hat{w}$ , запишем результирующее уравнение модели:

$$\begin{aligned} \bar{w}'' + \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} - \frac{\bar{u}'}{\bar{u} - c} - \frac{\bar{u}'}{\bar{u} - c - \frac{\beta}{k^2}} \right) \bar{w}' - \left[ \frac{N^2}{f^2} \left( k^2 - \frac{\beta}{\bar{u} - c} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\bar{u}'}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \left( \frac{1}{\bar{u} - c} + \frac{1}{\bar{u} - c - \frac{\beta}{k^2}} \right) \right] \bar{w} = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Это уравнение превращается в уравнение модели Иди при  $\beta = 0$  и  $\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0$ .

Граничные условия: на нижней границе ставится условие обращения  $w''$  в нуль, а условия на верхней границе зависят от ее вида.

В классической работе Чарни задача решается для тропосферы, ограниченной сверху тропопаузой, которая носит характер поверхности разрыва первого порядка: формулируются условия непрерывности  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $\rho$  при переходе через тропопаузу, а также условия на верхней границе атмосферы:

$$z \rightarrow \infty, \{ \rho u, \rho v, \rho w \} \rightarrow 0.$$

Такова постановка задачи.

Сравнивая ее с задачей Рэлея, можно установить, что для бароклинной неустойчивости имеют место теорема Сквайра (это свойство учтено при формулировке решений в виде нормальных мод) и аналог теоремы Рэлея: необходимое условие неустойчивости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{q}_g + f) = 0, \quad (2.37)$$

где  $\bar{q}_g = \nabla^2 \bar{\psi} + \frac{f_0^2}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}$ ;

$$\frac{\partial}{\partial y} (\bar{q}_g + f) = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{f^2}{N^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right]; \quad (2.38)$$

а  $\bar{\psi}$  – функция тока для основного потока.

Величина  $\bar{q}_g$  называется **относительным квазигеострофическим потенциальным вихрем**. Здесь он записан для общего случая зависимости скорости невозмущенного потока от  $x$  и  $y$ .

В случае чисто бароклинного потока (2.38) упрощается, а при линейном профиле (модель Иди) и  $\beta = 0$  потенциальный вихрь не зависит от  $y$  и, значит, (2.38) выполняется тождественно.

Выражение (2.37) известно как **теорема Чарни-Стерна**:

**Необходимым условием наличия неустойчивых мод является обращение в нуль и смена знака производной квазигеострофического потенциального вихря по поперечной к зональному потоку координате.**

В реальных атмосферных потоках очень редко реализуется условие бароклинной устойчивости. Как правило, производная квазигеострофического потенциального вихря по широте меняет знак в пределах полосы средних широт несколько раз.

Бароклинная неустойчивость, таким образом, является обычным свойством атмосферы.

Для бароклинного зонального потока имеет место также аналог теоремы Говарда: все комплексные собственные значения, если они существуют, лежат внутри полукруга, диаметр которого

$$D = \bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min} + \bar{Q}\beta,$$

где  $\bar{Q}$  – положительная величина, зависящая от профиля скорости.

Таким образом, интервал, в котором могут лежать фазовые скорости неустойчивых волн, несколько расширяется в сторону  $\bar{u}_{\max}$ .

В уравнении (2.36) в коэффициенте при  $\hat{w}$  имеется величина  $\frac{N^2}{f^2}\beta$ .

Эта величина отражает наличие восстанавливающей силы, обусловленной изменением параметра Кориолиса по широте. Аналогичная восстанавливающая сила имеется в задаче о баротропной неустойчивости. Легко себе представить действие этой силы, заставляющей частицу колебаться относительно той широты, на которой она находилась в положении равновесия.

Например, если вследствие какого-либо воздействия частица сместилась к северу от исходной широты, то приращение силы Кориолиса будет положительным и будет отклонять ее вправо (в северном полушарии) до тех пор, пока не вернет в положение равновесия, где приращение силы Кориолиса обратится в нуль. Но вследствие инерции частица будет продолжать смещаться в том же направлении (т. е. к югу), пока не будет заторможена получившимся отрицательным приращением силы Кориолиса, которое начнет отклонять ее влево, пока не повернет снова к северу.

Волны, образующиеся таким образом, – это, как мы уже знаем, волны типа Россби. Мы их получали в баротропной задаче. Так, в покоящемся слое мы имели фазовые скорости баротропных волн Россби

$$c = -\frac{\beta}{k^2}.$$

Такие волны бегут на запад. В зависимости от длины волны (от волнового числа) у них могут быть разные фазовые скорости. Если, например, генерировалось (от обтекания хребта или от других причин) какое-то возмущение

общего вида, которое представляется в виде суммы нескольких гармоник, то эти гармонические колебания будут распространяться каждое со своей фазовой скоростью (зависящей от  $k$ ), и на удалении от источника форма возмущения из-за этого меняется. Такое свойство волн называется **дисперсией**.

При наличии ветра, зависящего от координат  $z$  или  $y$ , волны Россби также существуют, но их фазовые скорости и амплитудные функции не выражаются такими простыми соотношениями, как у волн Россби в покоящейся среде или волн Гаурвица (частный случай баротропных волн Россби). В любом случае волны типа Россби на зональном потоке существуют, если имеет место  $\beta$ -эффект. При этом если поток чисто баротропный, то и волны типа Россби на этом потоке являются баротропными, а если он бароклиный, то и волны Россби бароклины.

Обратим внимание на то, что при  $N^2 = 0$  (безразличная стратификация) восстанавливающая сила в уравнении (2.36) пропадает, а с ней и волны Россби. Если же стратификация неустойчива ( $N^2 < 0$ ), то соответствующий член в уравнении (2.36) отрицателен, и вместо волн получается ускоряющееся движение частицы от положения равновесия, т. е. появляются конвективно-неустойчивые моды. Таким образом, в принципе задача о бароклиной неустойчивости содержит и конвективную неустойчивость. Недаром бароклиную неустойчивость называют еще наклонной конвекцией.

В средних широтах конвективная неустойчивость на синоптических масштабах в реальных условиях не наблюдается.

**Неустойчивые волны.** Задача на собственные значения, состоящая из уравнения (2.36) и соответствующих граничных условий, намного сложнее задачи Иди. В 1947 г. Чарни в своей классической работе получил только результаты для несингулярных мод (типа Россби) и оценил структуру неустойчивых волн в окрестности одного из участков нейтральной кривой. Подробный анализ задачи выполнен позже Педлоски (*Pedlosky, 1964*) и Куо (*Kuo, 1973*).

По поводу аналитического решения этой задачи Педлоски в своей монографии пишет: «С некоторым сожалением... приходится констатировать, что даже небольшое усложнение задачи Иди, делающее ее несколько более реалистичной, потребовало существенно более трудного и тонкого анализа». Действительно, в сравнении с решением Иди (которое тоже далеко не простое), в задаче Чарни получение решения потребовало больших усилий. В результате получено, что в плоскости величин, связанных с  $c_r$  и  $c_i$ , (была произведена замена переменных) графики зависимости фазовых скоростей и показателей роста имеют вид (рис. 2.10).

Здесь по оси абсцисс отложена величина

$$r = \frac{\frac{\beta N^2}{f^2 \bar{u}'} + \frac{1}{H_0}}{\left( \frac{1}{H_0^2} + \frac{4N^2 k^2}{f^2} \right)^{1/2}},$$

где  $H_0 = \frac{R\bar{T}}{g}$  – высота однородной атмосферы.

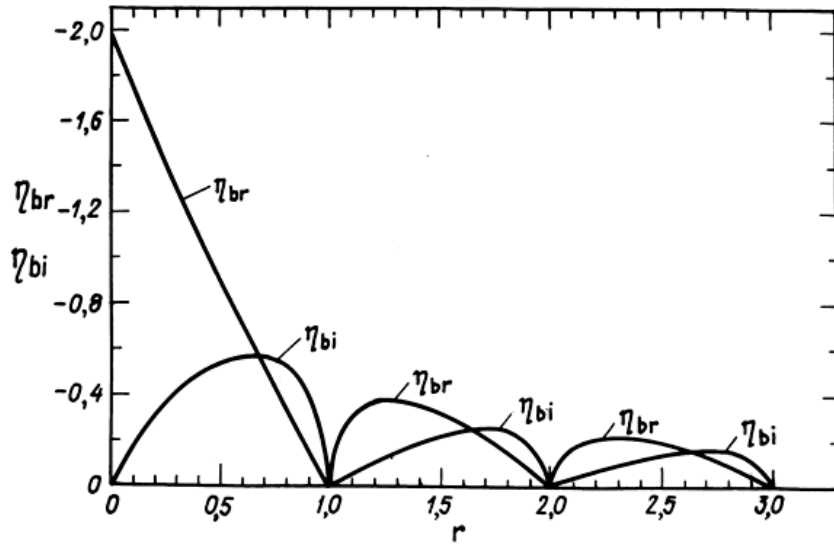


Рис. 2.10. Действительная и мнимая части  $\zeta$ , рассчитанные Кюо (Кюо, 1973).

Параметр  $r$  зависит, кроме постоянных  $\beta$ ,  $N^2$ ,  $f$ ,  $H_0$ , также от  $\bar{u}'$  и волнового числа  $k$ . Поскольку волновое число стоит в знаменателе, то получается, что величина  $r$  прямо пропорциональна длине волны.

Показатель роста и фазовая скорость здесь представлены через величины  $\eta_{br}$ ,  $\eta_{bi}$ , которые являются действительной и мнимой частями комплексной величины

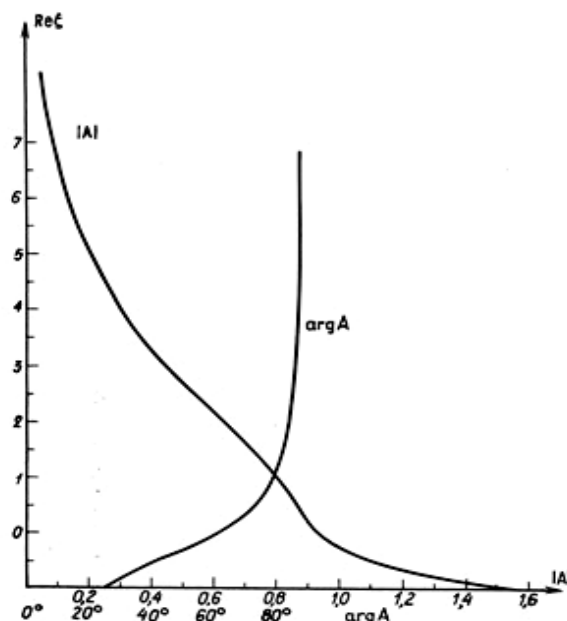
$$\xi_0 = \eta_{br} + i\eta_{bi} = \left( -\frac{c}{\bar{u}'} \right) \left[ H_0^{-2} + \frac{4N^2 k^2}{f^2} \right]^{1/2}.$$

При целых  $r$  неустойчивых мод нет, так что возникает несколько областей неустойчивости. Первая из них, где показатель роста наибольший, – это

аналог области неустойчивости в задаче Иди. Однако показатель роста наиболее неустойчивой волны здесь меньше, чем в задаче Иди, а уровень ведущего потока для нее лежит не на среднем уровне слоя с постоянным сдвигом ветра, а вблизи нижней границы, т. е. ее фазовая скорость ближе к минимальной скорости потока.

Нормальные моды, соответствующие этой первой области неустойчивости, называются волнами Чарни. Это наиболее быстро растущие и наиболее коротковолновые из неустойчивых волн модели Чарни. О более длинных неустойчивых волнах см. ниже.

Амплитудная функция наиболее неустойчивой волны для меридиональной (поперечной к потоку) составляющей скорости имеет вид, показанный на рис. 2.11.



**Рис. 2.11.** Амплитуда  $|A|$  и фаза  $\arg A$  наиболее неустойчивой моды при  $r = 0,5$  (Кио, 1973).

В целом ее вид аналогичен структуре волны Иди, в том отношении, что у земли ее величина максимальна, но с высотой она монотонно затухает так, чтобы удовлетворить верхнему граничному условию на бесконечности. Фаза волны растет с высотой, как и в двухслойной модели Иди.

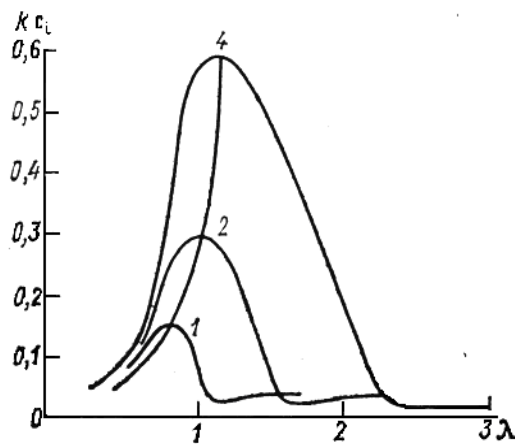
Вид зависимостей собственных чисел от  $r$  на рис. 2.10 вызывает ощущение некоторой нефизичности: сингулярные нейтральные волны при целых  $r$ , разделяющие области неустойчивости, по-видимому, не имеют аналогов в реальной атмосфере, а возникают в результате каких-то упрощений задачи.

Что же касается волн Чарни, то они соответствуют синоптическим масштабам бароклинно-неустойчивых возмущений.

Рассмотрим еще одну постановку задачи о бароклинной неустойчивости зонального потока – **модель Грина** (Green, 1964). Она является в формальном смысле промежуточной между моделями Иди и Чарни, так как для случая постоянного вертикального сдвига ветра уравнение модели совпадает с уравнением Чарни, а граничные условия ставятся такими же, как в модели Иди (на верхней жесткой стенке или на подвижной тропопаузе).

По своему физическому содержанию такая задача соответствует условиям развития возмущений больших масштабов (длинных бароклинных волн), неустойчивость которых и была впервые обнаружена в этой модели. Для таких возмущений важное значение приобретает сжимаемость воздуха.

В такой постановке задача включает, как и в двух ранее рассмотренных моделях, во-первых, несингулярные внешние моды, бегущие против потока, – аналог волн Россби. Во-вторых, имеются неустойчивые волны, спектр которых отличается от решений задачи Чарни. Хотя уравнения при  $\bar{u}' = \text{const}$  одинаковы, но из-за разницы в граничных условиях получаются различные зависимости  $c_i(\lambda)$ . Именно, для целых  $r$  тоже получаются ненулевые  $c_i$ , так что вместо последовательных изолированных областей неустойчивости получается одна область неустойчивости, объединяющая все эти множественные области (рис. 2.12).



**Рис. 2.12.** Показатели роста неустойчивых волн в модели Грина при различных значениях безразмерного сдвига ветра  $\bar{u}' = 1, 2, 4$ .

Здесь по оси  $x$  другой масштаб, чем на рис. 2.10, но в целом диапазон длин волн тот же, что и в модели Чарни. Неустойчивые волны при  $r < 1$  – это волны Чарни, а более длинные называются неустойчивыми волнами Грина. Структура их амплитудных функций и зависимость фаз от высоты в целом



аналогична волнам Иди. Так, максимум амплитудной функции  $v'$  находится вблизи подстилающей поверхности, фаза меняется по высоте так, что возникает термически прямая циркуляция и потенциальная энергия системы расходуется, превращаясь в энергию возмущений.

Показатели роста неустойчивых волн Грина меньше, чем волн Чарни. Казалось бы, на этом основании ими можно было бы пренебречь. Однако из-за большого диапазона длин волн, который допускает постановка задач Грина и Чарни, пренебрегать ими не следует. Если в исходном возмущении присутствуют только длинноволновые гармоники, то развивающиеся возмущения будут иметь свойства волн Грина.

Таким образом, в модели Грина имеются нейтральные несингулярные волны, бегущие на запад, и неустойчивые волны, бегущие на восток. Те и другие характеризуются большими длинами волн (зональные волновые числа меньше 7).

Итак, в бароклинических потоках может наблюдаться рост возмущений синоптических масштабов и масштабов длинных волн, а также могут существовать нейтральные несингулярные волны, развивающиеся под действием изменяющейся с широтой силы Кориолиса, которая играет роль восстанавливающей силы.

Неустойчивые волны синоптических масштабов, физическим аналогом которых в реальной атмосфере являются ложбины и гребни, циклоны и антициклоны средних широт, обнаруживаются как в модели с постоянной поперек потока силой Кориолиса, т. е. на  $f$ -плоскости (волны Иди), так и в моделях на  $\beta$ -плоскости (волны Чарни). Эти волны движутся по потоку (на восток) с фазовой скоростью, равной скорости ветра на уровне ведущего потока, т. е. на среднем уровне тропосферы (волны Иди) или на более низком уровне (волны Чарни). Фазы волн в полях давления, составляющих скорости ветра и температуры меняются с высотой; имеется также постоянный сдвиг фаз одной величины относительно другой. Так, у земли передняя часть барической ложбины ассоциируется с гребнем тепла и восходящими движениями. На среднем уровне теплый воздух поднимается, а холодный опускается. В верхней части слоя ложбина становится холодной, а гребень – теплым. Благодаря такой структуре волн происходит понижение потенциальной энергии слоя (уменьшение горизонтальных контрастов температуры) и за этот счет происходит рост возмущений. (Вследствие линейности задач уменьшение потенциальной энергии основного потока остается «бесконечно малым»).

В модели Иди имеется коротковолновое отсечение неустойчивости, но все длинные волны неустойчивы, хотя их показатели роста невелики. В модели Чарни также имеется неустойчивость длинных волн, хотя и в виде нескольких отдельных областей с уменьшающимися показателями роста. Коротковолновое отсечение в модели Чарни отсутствует. Наконец, в модели Грина все волны, даже самые длинные, неустойчивы, причем неустойчивые длин-

ные волны (волны Грина) соответствуют растущим длинным волнам в реальной атмосфере средних широт.

Из анализа этих моделей можно заключить, что бароклинная неустойчивость является обычным свойством атмосферы. Кроме того, можно заключить, что уже в наиболее простой (относительно) модели на  $f$ -плоскости все основные свойства бароклинно-неустойчивых волн обнаруживаются и качественно согласуются с наблюдениями. Бароклинная неустойчивость определяется наличием вращения Земли и горизонтальными контрастами температуры (вертикальным сдвигом ветра). Другие факторы –  $\beta$ -эффект, сжимаемость – в определенной мере меняют свойства неустойчивости, но играют второстепенную роль.

Кроме растущих (неустойчивых) волн, в моделях на  $\beta$ -плоскости присутствуют внешние моды типа Россби. Эти волны существуют как в баротропных, так и в бароклинных потоках и бегут к западу, против потока. Они не потребляют энергии основного потока, и амплитуды возмущений скорости ветра в этих волнах максимальны вблизи нижнего уровня. В бароклинных потоках волны Россби существуют только при устойчивой стратификации основного потока.

Рассмотренные модели для бароклинной неустойчивости на  $f$ -плоскости и  $\beta$ -плоскости являются основными. Имеется большое число работ, в которых получены решения для различных профилей ветра и температуры, с учетом наличия пограничного слоя, негеострофичности и негидростатичности основного потока и возмущений. Полученные решения таких задач в основном численные, лучше согласуются по своей структуре с атмосферными возмущениями. Однако представленные здесь простые модели являются классическими: несмотря на большое число упрощающих предположений, они схватывают наиболее существенные свойства бароклинно-неустойчивых возмущений на стадии начального роста.

Из сказанного заключаем, что **атмосферный циклогенез есть не что иное, как проявление бароклинной неустойчивости. Или, иначе говоря, задача о бароклинной неустойчивости является задачей о циклогенезе.**

### **Двухслойная задача о бароклинной неустойчивости**

На картах барической топографии поля объективного анализа и прогностические поля, полученные с помощью численных моделей, обычно представляются данными на дискретных уровнях. Поэтому в период бурного развития теории бароклинной неустойчивости большое внимание уделялось решению задач об устойчивости двух- и многоуровневных моделей воздушных течений. Остановимся на наиболее простой двухслойной модели Филиппса (*Phillips, 1954*).

Рассматривается зональный поток в ограниченной широтной полосе. В каждом слое параметр статической устойчивости считается постоянным, разность скоростей ветра в двух слоях задана и постоянна. В этих условиях удастся получить дисперсионное соотношение, из которого выводится условие существования неустойчивых волн (комплексных фазовых скоростей). При одинаковых меридиональном и широтном размерах возмущений это условие имеет вид

$$U_1 - U_3 > \sigma \cos \varphi (\sin^2 \varphi)^{-1}.$$

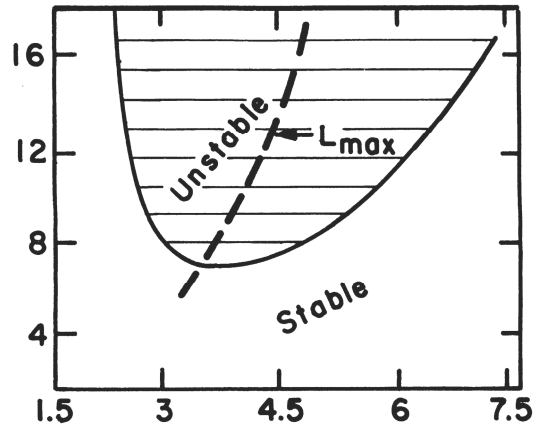
Здесь  $U_1, U_3$  – скорости зонального потока соответственно на верхнем и нижнем уровнях (250 и 750 гПа соответственно);  $\varphi$  – широта;  $\sigma = 0,024c_p \Delta\theta / 2R\Omega$  – параметр статической устойчивости ( $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_3$ );  $R$  – радиус Земли;  $\Omega$  – угловая скорость ее вращения.

Критерий Филиппса удобен для применения и дает хорошие результаты, несмотря на грубость модели, в которой он получен. С его помощью лучше всего выделяются участки поля, в которых развиваются глубокие циклоны. Зарождение и начальный рост неглубоких циклонов реже происходят в участках выполнения критерия Филиппса (приблизительно в 50–60 % случаев), тогда как циклоны, развивающиеся в глубокие возмущения, зарождаются и углубляются в областях, где критерий Филиппса превышает критическое значение, в 70–90 % случаев. (Критическим значением  $U_1 - U_3$  считалось 10 м/с летом и 20 м/с зимой. Глубокими считались циклоны, в центре которых давление упало на 20 гПа и более за период углубления.) Эти результаты получены были Е.Н. Скриптуновой (Скриптунова, 1982).

На рис. 2.13 показана диаграмма устойчивости в двухслойной модели Халтинера, несколько отличающейся от модели Филиппса (Phillips, 1954). Здесь оценивается возможность роста возмущений в слое от 1000 до 500 гПа. Как показатель роста, так и длина волны отсечения со стороны длинных волн растут с ростом разности скоростей (термического ветра) в зональном потоке.

Из многочисленных работ по бароклинной неустойчивости можно извлечь следующие выводы.

- показатель роста неустойчивых мод определяется вертикальным сдвигом ветра и, значит, горизонтальным градиентом температуры;
- чем больше вертикальный сдвиг ветра, тем больше показатели роста и тем больше длина наиболее неустойчивой волны;
- при вертикальных сдвигах ветра, меньших некоторого критического, неустойчивость отсутствует;
- волны с длиной, меньшей некоторого минимума (в условиях рисунка – около 2000 км), устойчивы;
- максимальные показатели роста соответствуют волнам длиной 3–4 тыс. км, или зональному волновому числу 7–8 на широте 45°.



**Рис. 2.13.** Диаграмма устойчивости в двухслойной модели: по оси абсцисс – длина волны  $L$  ( $10^3$  км), по оси ординат – сдвиг зонального ветра  $U_3 - U_0$  (м/с). Область неустойчивости заштрихована, пунктиром показаны длины наиболее неустойчивых волн, по (Haltiner, Williams, 1980).

### Комбинированная баротропно-бароклинная неустойчивость

Задача о неустойчивости потока с поперечным и вертикальным сдвигами скоростей более реалистична, но и более сложна, чем задачи о чисто баротропной или бароклинной неустойчивости.

В простейшем случае поток считается зональным. В случае адиабатического невязкого движения в предположениях квазигидростатичности и Буссинеска, система уравнений гидродинамики в этом случае принимает вид, известный как примитивные («полные») уравнения. Запишем их в безразмерном виде, причем в уравнениях появится число Россби ( $Ro = U / fL$ ):

$$\begin{aligned}
 Ro \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \\
 Ro \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \Phi - \frac{\theta'}{\varepsilon \bar{\theta}} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w) &= 0, \\
 Ro \frac{d}{dt} \frac{\theta'}{\varepsilon \bar{\theta}} + w \frac{d\theta}{dz} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр;  $\Phi$  – функция тока:

$$\varepsilon = \left| \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right| = \left| \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right| \approx 10^{-2}; \quad \Phi = \frac{P'}{f_0 UL \bar{\rho}}.$$

Систему примитивных уравнений в случае зонального потока, на который наложены малые возмущения, можно линеаризовать, представив все величины в виде рядов по степеням числа Россби, которое для движений синоптического масштаба является, как мы видели ранее, величиной порядка  $10^{-1}$  или менее:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' = u_0 + \text{Ro} u_1 + \dots, \\ v &= v' = v_0 + \text{Ro} v_1 + \dots, \\ w &= w' = \text{Ro} w_1 + \text{Ro}^2 w_2 + \dots, \\ \theta' &= \theta_0 + \text{Ro} \theta_1 + \dots, \\ P' &= P_0 + \text{Ro} P_1 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в систему уравнений (2.38) и собирая члены нулевого порядка, получим

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + v_0, \\ 0 &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - u_0, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} &= \frac{\theta_0}{\varepsilon \bar{\theta}}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Таким образом, поток нулевого порядка по  $\text{Ro}$ , или основной поток нашей задачи, является геострофическим и гидростатическим:

$$v_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}.$$

Собирая теперь члены первого порядка по  $\text{Ro}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \beta y v_0 - v_1, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \beta y u_0 + u_1, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= \frac{\theta_1}{\varepsilon \bar{\theta}} - \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Phi_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w_1) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\theta_0}{\varepsilon \bar{\theta}} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\theta_0}{\varepsilon \bar{\theta}} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\theta_0}{\varepsilon \bar{\theta}} + w_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Здесь параметр  $\beta$  безразмерный, так что выражение для безразмерного параметра Кориолиса имеет вид  $f = 1 + \beta \text{Ro } y$ .

Из этих уравнений, дифференцируя первое из них по  $y$ , второе по  $x$  и вычитая, получаем уравнение для квазигеострофического относительного вихря

$$\xi_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \nabla^2 \Phi_0$$

в виде

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \beta v_0 = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} w_1).$$

С помощью последнего уравнения (2.40) (относительно  $\theta_0$ ) исключаем  $w_1$ . Получаем

$$\frac{\partial q_g}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q_g}{\partial x} + v_0 \left( \frac{\partial q_g}{\partial y} + \beta \right) = 0.$$

Здесь  $q_g$  – квазигеострофический относительный потенциальный вихрь, а

$N_\theta^2$  – безразмерная частота Брента-Вяйсяля (Brunt-Väisälä):

$$q_g = \nabla^2 \Phi_0 + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\rho}}{N_\theta^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right); \quad N_\theta^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{H}{f_0^2 L^2}.$$

В размерном виде квазигеострофический относительный потенциальный вихрь

$$q_g = \nabla^2 \psi + \frac{f_0}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{\rho}}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right),$$

где  $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ ;  $\psi = \frac{P'}{f_0 \bar{\rho}}$  – функция тока;  $\bar{u} = u_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ .

Таким образом, мы получили уравнение для квазигеострофического относительного потенциального вихря. Поскольку в нашем приближении  $\beta$  – это производная силы Кориолиса по  $y$ , а поток зонален, то последнее уравнение можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) (q_g + f) = 0 \quad (2.41)$$

или

$$\frac{d}{dt} (q_g + f) = 0. \quad (2.42)$$

Таким образом, абсолютный квазигеострофический потенциальный вихрь  $q_g + f$  есть инвариант системы уравнений (2.40).

У системы примитивных уравнений (2.38) тоже есть инвариант, который несколько отличается от  $q_g$ . Эту величину мы укажем без соответствующего вывода: это абсолютный потенциальный вихрь Эртеля (Ertel)  $PV$ , (см. (1.43)–(1.44)).

Величина  $PV$  является, таким образом, инвариантом адиабатических невязких движений в приближении Буссинеска. Величина абсолютного потенциального вихря Эртеля в индивидуальной частице может изменяться в случаях нарушения условия адиабатичности (наличия притоков тепла), наличия существенной вязкости (например, в пограничном слое) или существенных небуссинесковских эффектов сжимаемости. В остальных случаях она может считаться постоянной.

Теперь представим возмущения в виде нормальных мод с амплитудными функциями, зависящими от  $y, z$ . В результате получится уравнение, представляющее собой обобщение ранее рассмотренных задач об устойчивости. Мы не будем его рассматривать, остановимся только на некоторых свойствах задачи, состоящей из этого уравнения и граничных условий по вертикали и на горизонтальных границах широтной полосы.

В этой задаче присутствуют все три класса собственных значений: нейтрально устойчивые несингулярные волны типа Россби, неустойчивые волны и нейтральные сингулярные волны. Геометрическое место последних двух классов определяется теоремой о полукруге, которая формально выглядит так же, как и для волн Чарни. Конкретные значения фазовых скоростей неустойчивых волн определяются конкретными профилями скорости и температуры в основном потоке, зависящими от  $y, z$ .

Имеется большое число публикаций, в которых решения найдены для целого ряда профилей, преимущественно численно, но в отдельных случаях и аналитически: например, для таких условий, когда один из видов неустойчивости играет малую роль в сравнении с другим. Такова задача о влиянии слабой бароклинной неустойчивости на свойства баротропно-неустойчивых

волн или, наоборот, о влиянии слабой баротропной неустойчивости на бароклинную.

Надо иметь в виду, что среднегодовые поля баротропно устойчивы, но в конкретных ситуациях и в отдельных областях может иметь место баротропная неустойчивость. Одновременно почти всегда имеет место и бароклинная неустойчивость, причем интервалы длин баротропно и бароклинно неустойчивых волн различны.

Особый интерес представляет задача об устойчивости трехмерного потока, имеющего вид суммы зонального потока и волны Россби. Она изучается как возможный механизм перестройки систем общей циркуляции атмосферы и, с другой стороны, как причина циклогенеза синоптических масштабов в условиях развитых меридиональных движений. Начало этого направления исследований положено работой Лоренца (*Lorenz, 1972*). Работы этого направления показали, что возможности потери устойчивости расширяются при наличии крупномасштабных волн, по сравнению с чисто зональным потоком, и что районы максимальной неустойчивости находятся на подветренных сторонах высотных ложбин в их северных частях. Районы преимущественного циклогенеза целесообразно определять путем локального использования критериев бароклинной неустойчивости (например, критерия Филлипса). Район наиболее интенсивного роста неустойчивых возмущений расположен несколько ниже по потоку относительно той точки, в которой локальный сдвиг ветра больше всего превосходит критическое значение, задаваемое критерием Филлипса.

Таким образом, имеется возможность получения энергии волнами синоптического масштаба от волн планетарного масштаба. Если основная волна Россби баротропна, она не создает запасов доступной потенциальной энергии, но передает им часть своей кинетической энергии. Если же это бароклинная волна Россби (как в модели Чарни), то доступная потенциальная энергия передается возмущениям и расходуется на рост их кинетической энергии.

Можно представить себе и обратный процесс: синоптические вихри, развивающиеся за счет доступной потенциальной энергии основного потока на каком-либо его участке, отдают свою кинетическую энергию волне Россби, которая за этот счет растет. Такое рассмотрение невозможно провести в рамках линейной теории неустойчивости; мы вернемся к нему позже. Пока заметим лишь, что такая возможность роста волны за счет энергии синоптических вихрей изучается в связи с проблемой развития блокирующих антициклонов.

Другой аспект задачи об устойчивости волн Россби в рамках линейной теории состоит в следующем.

Исследуется устойчивость основного баротропного потока, имеющего вид волны Россби конечной амплитуды на заданном основном потоке относительно волнового возмущения бесконечно малой амплитуды, имеющего вид также волны Россби, с длиной волны (зональным волновым числом), равной длине волны основной волны Россби. Но фазовые скорости этих двух волн



разные. В работе (*Hoskins, Hollingsworth, 1973*) показано, что такой поток является неустойчивым, т. е. возмущение будет экспоненциально расти, если завихренность в основном потоке превосходит критическое значение, определяемое соотношением зонального и меридионального волновых чисел  $m$  и  $n$  ( $n$  здесь имеет физический смысл меридионального масштаба основного потока). Рассчитано время роста в  $e$  раз амплитуды неустойчивой волны, имеющее порядок немногих суток. Физический контекст такой задачи также связан с проблемой возникновения блокирующих антициклонов.

### Блокирующие антициклоны: определения, сезонный ход и географическое распределение

Согласно метеорологическому словарю, блокирующими называются высокие стабилизировавшиеся антициклоны, нарушающие общий западный перенос в средних широтах. Традиционно такие антициклоны определялись как области больших высот поверхности 500 гПа. Количественный критерий наличия и интенсивности блокирования, определяемого на основе топографии этой поверхности, был предложен Рексом (*Rex, 1950*) и позже получил развитие в работах Тибальди и Мольтени (*Tibaldi, Molteni, 1990*). Блокирование определялось следующим образом. Градиенты геопотенциальных высот  $z$  поверхности 500 гПа рассчитывались на каждой долготе (на географической сетке  $4 \times 4^\circ$ ) для параллелей 50 и  $70^\circ$  с.ш. и их окрестностей ( $\pm 4^\circ$  с.ш.):

$$G(50) = \frac{z(\varphi_0) - z(\varphi_S)}{\varphi_0 - \varphi_S},$$

$$G(70) = \frac{z(\varphi_n) - z(\varphi_0)}{\varphi_n - \varphi_0}. \quad (2.43)$$

Здесь  $\varphi_0 = 60^\circ + \Delta$ ;  $\varphi_n = 80^\circ + \Delta$ ;  $\varphi_S = 40^\circ + \Delta$ ;  $\Delta = -4; 0; 4^\circ$  с.ш. На конкретной долготе в конкретный срок определялось наличие блокирования, если хотя бы при одном значении  $\Delta$  выполнялись следующие условия:

$$G(50) > 0, \quad (2.44)$$

$$G(70) < -10 \text{ м/1 град. широты}. \quad (2.45)$$

Условие (2.45) позволило исключить из «каталога блокирований» случаи большого смещения к югу западного струйного течения средних широт, так что условие (2.44) формально выполнялось, но с точки зрения синоптиков такую ситуацию нельзя было считать блокирующей. Фактически условие (2.45) означает, что к северу от блокирующего антициклона должен существовать заметный западный поток (не менее 8 м/с).

Другой критерий блокирования был предложен в работах Г.В. Грузы (*Груза, Коровкина, 2010а; Груза, Коровкина, 2010б*): блокирующий антици-

клон определялся как область, в которой отклонение  $H_{500}$  от среднеширотного значения было положительным и не меньшим заданного критического значения в течение промежутка времени  $T$ , принимаемого за продолжительность блокирования. Если это условие перестает выполняться на короткое (2 суток и менее) время, а затем снова выполняется, то период блокирования считается непрерывным, включая это короткое время.

Очевидно, что критерий (2.44)–(2.45) предполагает отсечение блокирующего антициклона с юга (полное или частичное, с омега-образной конфигурацией изогипс), а критерий Г.В. Грузы включает в число блокингов также не отсекающиеся стационарные гребни, в которых знак горизонтального градиента  $H_{500}$  сохраняется на всех широтах.

Пелли и Хоскинс (*Pelly, Hoskins, 2003a; Pelly, Hoskins, 2003b*) предложили так называемый  $PV - \theta$  индекс блокирования и определение блокирующего антициклона, опирающееся на концепцию потенциального вихря Эртеля,  $PV$  и потенциальной температуры  $\theta$  как основных динамических характеристик атмосферы. Согласно этому определению, блокирующий антициклон представляет собой явление обращения знака обычного меридионального градиента потенциальной температуры на динамической тропопаузе в окрестности широты климатологического шторм-трека, имеющее горизонтальный масштаб 1500 км и более и сохраняющееся не менее 5 дней.

В качестве динамической тропопаузы берется изоповерхность 2 рvи потенциального вихря Эртеля.

Обычный меридиональный градиент  $\theta$  на этих высотах характеризуется более высокими  $\theta$  на юге и низкими на севере.

Индекс блокирования представляется в виде

$$B = \frac{2}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2}} \theta d\varphi - \frac{2}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_0 - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_0} \theta d\varphi. \quad (2.46)$$

Согласно этому определению,  $B < 0$  в западном потоке, но  $B > 0$  в зоне блокирования. На долготе  $\lambda$  имеет место блокирование, если там  $B > 0$ , то есть там высокая  $\theta$  в более северных широтах и низкая в более южных.

Таковы основные критерии блокирования, используемые в настоящее время. Несмотря на определенную разницу в количественных условиях и критериях, основные результаты разных работ хорошо согласуются в качественном отношении. Так, в северном полушарии максимум повторяемости блокирования был получен над восточной Атлантикой и Европой, вторичный максимум – над центральным и восточным Тихим океаном. Около Скандинавии получено 24 % дней с блокированием. Годовой ход характеристик блокирования сложен, межгодовая изменчивость высока. Долговременных трендов повторяемости не отмечено, по крайней мере, в северном полушарии. Над Европой максимум интенсивности получен зимой и осенью. Доля эпизо-

дов блокирования над Европой при продолжительности 5 дней и более выше, чем где-либо. Это связано с орографией и распределением моря и суши, а также снежного покрова.

В северном полушарии блокирующие антициклоны чаще наблюдаются и более интенсивны, чем в южном. Причины различий кроются в динамике образования блокингов, а в конечном счете – в особенностях распределения суши и моря.

В настоящее время появление блокинга связывается с динамикой длинных волн типа Россби и рассматривается как результат их нелинейной неустойчивости и опрокидывания (breaking).

В отношении прогнозирования блокирующих антициклонов основные усилия исследователей направлены на прогноз наступления блокирования со значительным (в пределах среднесрочного прогнозирования) упреждением, т. е. прогнозированием с исходного срока, в который нет признаков блокирования. Если же в начальных данных блокирующий антициклон имеется, то его сохранение и затем разрушение моделируются довольно успешно, имея в виду и тот факт, что разрушение блокирующего антициклона происходит намного медленнее, чем установление. Наиболее успешным, в плане прогноза установления блокирующего антициклона, считается ансамблевое прогнозирование, дающее значимые результаты (опять-таки в рамках среднесрочного прогноза); в отношении долгосрочного прогноза никаких специальных достижений, касающихся блокирования по-видимому не получено.

Рассмотрим в качестве примера волн Россби большой амплитуды среднее поле АТ500 за июль 2010 г. (рис. 2.14), когда, как известно, погода у нас определялась блокирующим антициклоном. Мы видим вдоль широтного круга четыре гребня (из них три – блокирующие антициклоны) и четыре ложбины, или циклона, – иначе говоря, имеется планетарная волна большой амплитуды с зональным волновым числом 4. Эта система, несколько меняясь во времени, сохранялась около 55 суток с хорошо известными катастрофическими последствиями.

Хотя долгоживущие (более 10 суток) блокинги встречаются довольно часто, однако эпизоды, подобные наблюдавшемуся летом 2010 г., все же чрезвычайно редки.

Как уже отмечалось выше, механизмом образования блокирующих антициклонов, согласно современным представлениям, является нелинейная неустойчивость волн Россби, ведущая к их опрокидыванию. Как всякая неустойчивость, она развивается при наличии подходящего исходного возмущения.

Нелинейность неустойчивости в данном случае означает, что существенную роль играет обмен энергией как с волнами сравнимых длин, так и с синоптическим вихрями, которые могут питать блокинг своей энергией (отрицательная вязкость, см. ниже), а могут и ослаблять его. Существует развитый математический аппарат, позволяющий рассчитывать такой энергообмен. Относительные вклады потоков энергии к блокингу от синоптических вихрей

и планетарных волн варьируют в зависимости от конкретных условий. Есть указания на разницу в энергетическом бюджете блокирующих антициклонов северного и южного полушарий.

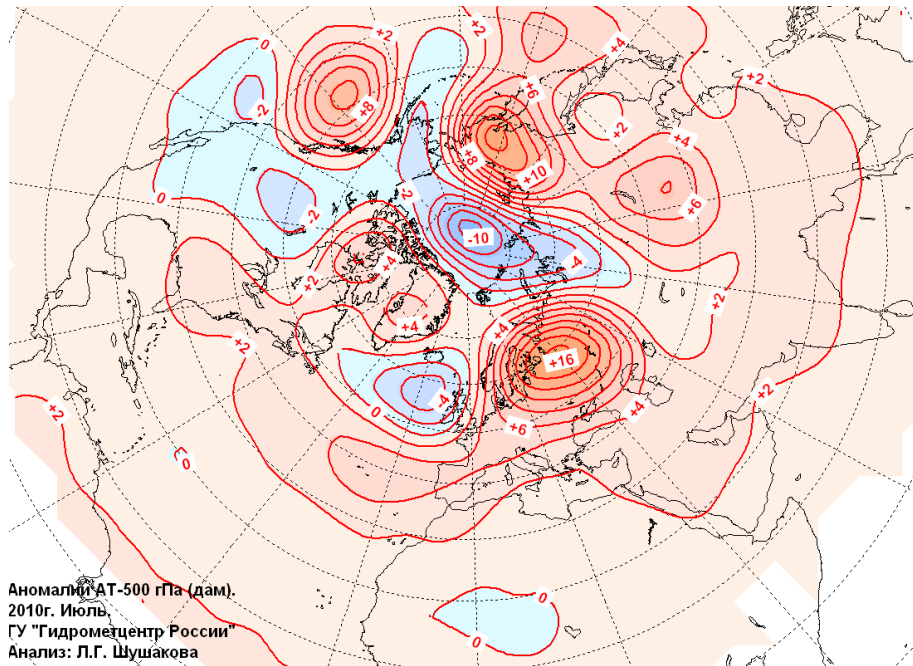


Рис. 2.14. Поле аномалий AT500 в июле 2010 г.

### Нелинейные эффекты бароклинной неустойчивости: качественная характеристика

Рассмотрим на простом примере возможные изменения неустойчивых возмущений при возрастании их амплитуды.

Пусть, в соответствии с линейной теорией, возмущение имеет вид нормальной моды и, будучи неустойчивым, растет по амплитуде как  $e^{kc_it}$ . Все эффекты взаимодействий между возмущениями и основным потоком, как и взаимодействия возмущений между собой, описываются нелинейными членами уравнений движения и притока тепла. В уравнении движения это (в векторной форме)  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ .

Если подставить в это выражение  $\vec{V} = \{\bar{u} + u', v', w'\}$ , где  $\bar{V}$  – основной поток;  $v'$  – возмущения; и собрать члены первого порядка, т. е. такие, в кото-

рые  $v'$  входило бы в первой степени (как мы всегда поступаем при линеаризации), то получится

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \approx (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \nabla) \vec{V} \approx \left\{ \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x}, \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} \right\}. \quad (2.47)$$

Приведем промежуточные выкладки, имея в виду, что в (2.47) в круглых скобках стоят скалярные произведения, в результате которых получаются скалярные операторы, а их произведения на  $\vec{V}$  или  $\vec{v}'$  будут векторами.

$$\vec{V} = \{\bar{u}, 0, 0\}$$

$$\vec{v}' = \{u', v', w'\}, \quad \vec{V} \Delta = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(\vec{V} \Delta) \vec{v}' = \left\{ \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}, \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x}, \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} \right\}$$

$$\vec{v}' \nabla = u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + w' \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\vec{v}' \nabla) \vec{V} = \left\{ w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, 0, 0 \right\}$$

Это те члены, которые мы учитывали в линейных задачах. В результате их решения мы находили неустойчивые волны, амплитуда которых экспоненциально растет во времени, Система гребень–ложбина или циклон–антициклон, которая представляет собой неустойчивую волну, должна, согласно линейной теории, развиваться во времени таким образом, что амплитуды всех величин в гребне и ложбине одинаково растут с показателем роста  $\omega_i$ , тогда как пространственная структура этих волн со временем не меняется, она остается такой, как мы видели, например, в задаче Иди:

$$\hat{v} = \frac{\hat{w}' f}{k^2 (\bar{u} - c)}, \quad \hat{u} = -\frac{\hat{w}}{ik}, \quad \frac{\hat{P}}{\bar{\rho}} = \frac{if^2 \hat{w}'}{k^3 (\bar{u} - c)},$$

$$\frac{\hat{\theta}}{\bar{\theta}} = \frac{iN^2 \hat{w}}{gk(\bar{u} - c)} + \frac{if^2 \bar{u} \hat{w}'}{gk^3 (\bar{u} - c)^2}.$$

Однако со временем растущие возмущения перестают быть намного меньшими, чем характеристики основного потока, так что приближение (2.47) станет непригодным. Отброшенные при его выводе величины

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x}, \dots, w' \frac{\partial w'}{\partial z}, u' \frac{\partial \theta'}{\partial x}, \dots, w' \frac{\partial \theta'}{\partial z},$$

которые были в начальный момент намного меньше, чем  $\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}$  и другие со-  
храненные в линеаризованных уравнениях члены, – теперь уже не пренебре-  
жимы. Возникает необходимость учета этих (нелинейных по  $u', v', \dots$ ) чле-  
нов. Их физический смысл состоит в том, что они описывают взаимодействие  
и взаимное влияние возмущений, тогда как в линейной задаче учитывается  
только влияние основного потока на возмущения. Кроме того, нелинейные  
члены описывают, как мы сейчас увидим, и обратное влияние возмущений на  
основной поток.

В линейной задаче мы считаем возмущения малыми, даже «бесконечно  
малыми» (infinitesimal, в русских работах также встречается термин «инфи-  
нitezимальные»). Это чисто математическое понятие, означающее, что даже  
если решения оказываются растущими, мы все же считаем их удовлетворяю-  
щими уравнениям линейной теории и на этом основании определяем их  
свойства. Однако с точки зрения физики мы должны отдавать себе отчет в  
том, что после решения линейной задачи, если мы хотим проследить даль-  
нейшую эволюцию возмущений, от предположения инфинитезимальности  
надо отказаться. Вместо этого, чтобы облегчить себе анализ, целесообразно  
перейти к представлению о «малых, но конечных» (small, but finite) возмуще-  
ниях, которые первоначально удовлетворяли линейной задаче, но со време-  
нем перестают ей удовлетворять. В рамках приближения о малых, но конеч-  
ных возмущениях вводится малый «параметр амплитуды»

$$A = \frac{u'_{xap}}{\bar{u}_{xap}}, \quad (2.48)$$

который следует рассматривать как функцию времени. Амплитудные функ-  
ции линейной задачи (например задачи Иди) запишем как произведения  $A$   
на безразмерные функции порядка единицы, а возмущения представим в виде  
рядов по степеням  $A$ , аналогично приведенным выше разложениям по сте-  
пеням  $Ro$ , в частности

$$w' = \sum_{n=1}^{n=\infty} A^n w^{(n)}(x, z, t), \quad (2.49)$$

причем  $w^{(1)}$  будет решением линейной задачи:

$$w^{(1)} = \bar{w}(z) e^{ik(x-ct)} = \bar{w}(z) e^{i\varphi} e^{\omega_i t}.$$

Здесь  $\varphi = k(x - c_r t)$  – фаза волны;  $\omega_i = kc_i$  – показатель роста.

Согласно формуле Эйлера,  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

Если подставить (2.49) в систему уравнений движения и притока тепла и собрать члены с  $A^1$ , то получатся уравнения линейной задачи; а если собрать члены с  $A^2$ , то получим неоднородную систему, в левых частях уравнений которой будут стоять функции типа  $\omega^{(2)}, u^{(2)}, \dots$ , причем операторы будут линейными. В правой части будут стоять величины, известные из решения линейной задачи, в комбинациях вида

$$u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \dots, w^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}, \dots$$

Но, как мы положили выше,

$$w^{(1)} = \hat{w}(z) e^{i\varphi} e^{\omega_i t} = \hat{w}(z) e^{\omega_i t} (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$u^{(1)} = \hat{u}(z) e^{\omega_i t} (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

.....

Если мы запишем теперь выражения типа  $u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \dots$ , то в этих выраже-

ниях появится множитель  $e^{2\omega_i t}$ , а также множители типа

$$\sin \varphi \cos \varphi; \quad \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi; \quad \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi. \quad (2.50)$$

Исследуя условия появления этих множителей, надо учесть, что амплитудные функции линейной задачи, как мы видели раньше, не все являются синфазными (например, действительными). Они сдвинуты по фазе друг относительно друга. Первое и второе выражения (2.50) равны, соответственно,  $\sin 2\varphi$ ,  $\cos 2\varphi$ , тогда как  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ . То есть появляется негармонический член, не зависящий от  $\varphi$ .

Таким образом, в решении для  $n=2$  появятся старшие гармоники (с вдвое меньшими длиной волны и периодом) и, кроме того, в этом решении будут содержаться слагаемые непериодические. Это значит, что возникнет добавочное (вторичное) непериодическое течение, которое является результатом влияния возмущений на основной поток. Возникающие старшие гармоники будут деформировать основную волну.

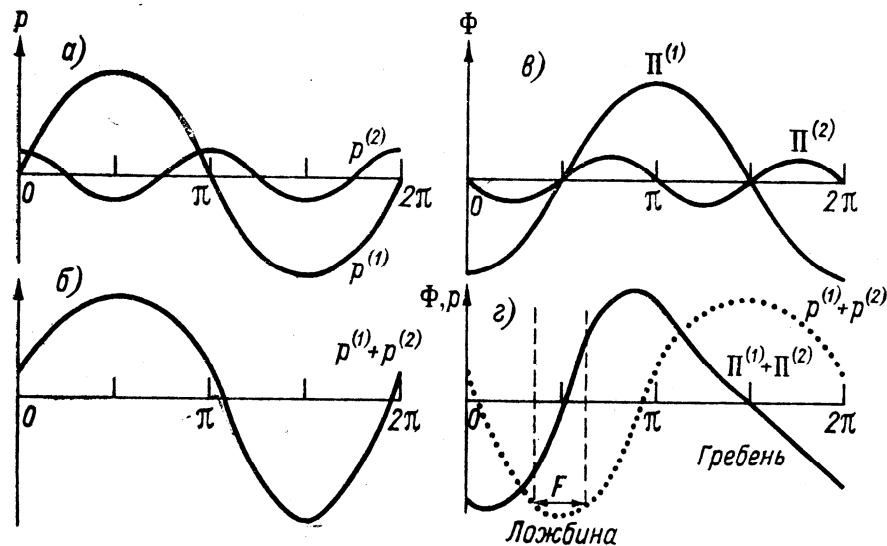
Мы показали, таким образом, что с ростом возмущений меняется их структура. Меняется и основной поток, отдающий энергию возмущениям. (В линейном приближении основной поток хотя и является источником энергии для возмущений, но сам не меняется: потеря им энергии считается пренебрежимой.)

Определим, какие изменения формы волны вызывают появляющиеся старшие гармоники с удвоенным волновым числом в полях возмущений давления и температуры.

Без вывода укажем, что вторая гармоника в поле давления сдвинута относительно первой на  $\pi/4$ , а гармоники энтропии  $\Pi$  (а значит и потенциальной температуры) в момент  $\varphi = 0$  синфазны ( $\Pi^{(2)}$  и  $\Pi^{(1)}$ ). Кроме того, волна  $\Pi$  сдвинута относительно волны  $P$  на  $\pi/2$ .

Просуммировав обе гармоники, получаем, что изменения формы волны в поле давления выражаются в том, что гребень (или антициклон) становится более широким и плоским, а ложбина (или циклон) – более узкой и глубокой. Такой результат получается из-за сдвига фаз между первой и второй гармониками.

На рис. 2.15 по оси абсцисс отложена фаза  $\varphi$ , которая при фиксированных  $t, z$  может рассматриваться как координата  $x$  (по потоку). Здесь взято  $z = 0$ , что означает средний уровень (уровень ведущего потока) задачи Иди, а момент  $t$  соответствует 5 суткам с начала роста наиболее неустойчивой волны.



**Рис. 2.15.** Схема изменения формы растущей бароклинной волны в полях давления и температуры в результате наложения второй гармоники.  $p^{(1)}$ ,  $\Pi^{(1)}$  – первичная волна, даваемая линейной теорией;  $p^{(2)}$ ,  $\Pi^{(2)}$  – вторая гармоника (Шакина, 1985).

Поле отклонений температуры, как мы видели при анализе модели Иди, сдвинуто по фазе относительно отклонений давления, и эта разность фаз зависит от высоты. Но на среднем уровне она равна  $\pi/2$ . Вторая гармоника возмущений температуры накладывается на первую таким образом, что как раз в области барической ложбины возникает зона увеличенных градиентов



температуры вдоль оси  $x$  (или оси  $\varphi$ ) – фронтальная зона, показанная буквой  $F$ . В гребне, наоборот, происходит фронтолиз.

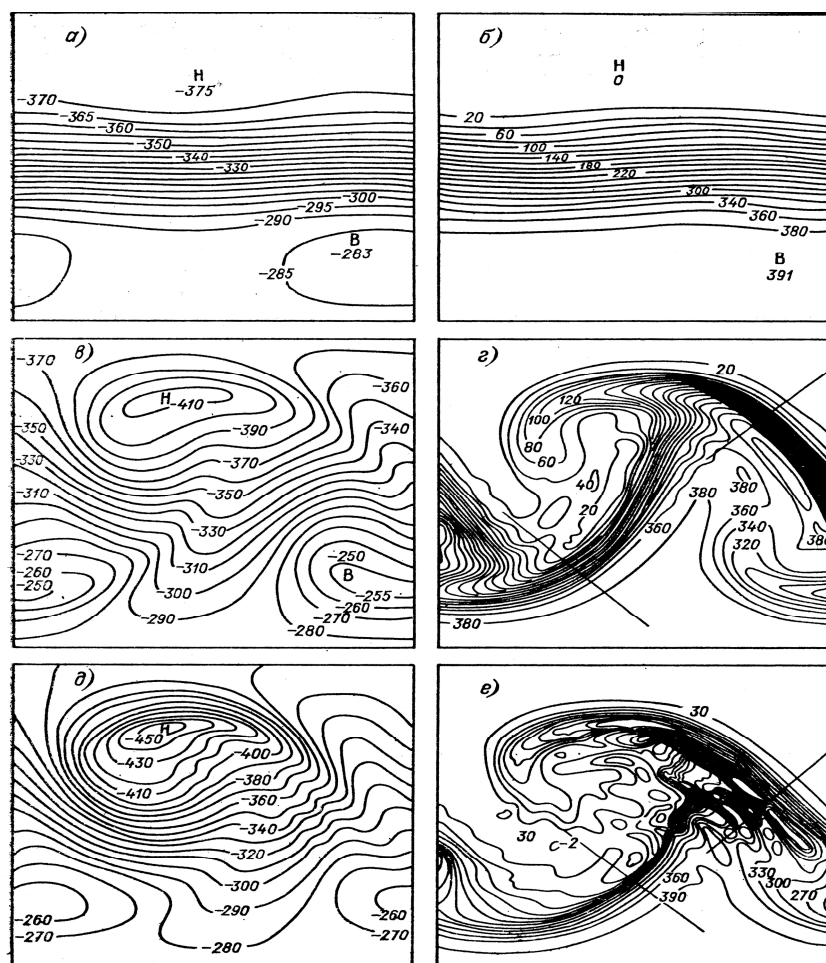
Простые схемы, приведенные на рисунке, демонстрируют сущность основных нелинейных эффектов (второго порядка по  $A$ ) в «одномерном» представлении. Распределение этих эффектов в горизонтальной плоскости и по вертикали, зависящее от времени, также можно проанализировать в рамках приближения малых, но конечных амплитуд. Этот метод, восходящий к работе Л.Д. Ландау (1944 г.) и развитый далее Стюартом и Ватсоном, основывается, помимо разложения по параметру амплитуды, еще на некоторых допущениях о зависимости амплитуды и частоты волны от времени, позволяющих последовательно (для  $n = 2, 3, \dots$ ) определять амплитудные функции и нелинейные поправки к показателю роста и частоте волны. Такие решения показывают, что на более поздних стадиях роста неустойчивых волн, когда необходимо учитывать третьи гармоники, структура возмущений претерпевает изменения, характерные для реальных развитых атмосферных вихрей: уменьшение наклона осей барических образований к вертикали, сужение гребней тепла на нижних уровнях и вытеснение теплого воздуха на верхние уровни.

Таким образом, на стадии нелинейного развития в бароклинно-неустойчивой волне происходит целый ряд процессов, характерных для реальных циклонов и антициклонов: углубление областей низкого давления и «растекание» областей высокого, фронтогенез в циклонах и фронтолиз в антициклонах, уменьшение наклона пространственных осей барических центров со временем, вытеснение теплого воздуха наверх. Все эти процессы присутствуют уже в квазигеострофической модели. Это означает, что причиной указанных процессов эволюции бароклинно-неустойчивых возмущений является не что иное, как нелинейный обмен или, что то же самое, адвективные изменения в полях ветра (давления) и температуры.

## **Полностью развитые нелинейные режимы**

Представленные выше оценки нелинейных эффектов (второго порядка по параметру амплитуды) не исчерпывают изменений неустойчивой волны на стадии нелинейного роста. При численном интегрировании систем уравнений динамики атмосферы (в частности, квазигеострофических и полных уравнений) в модельных циклонах возникают резкие фронтальные зоны в нижнем слое, сужение теплого сектора и окклюдирование.

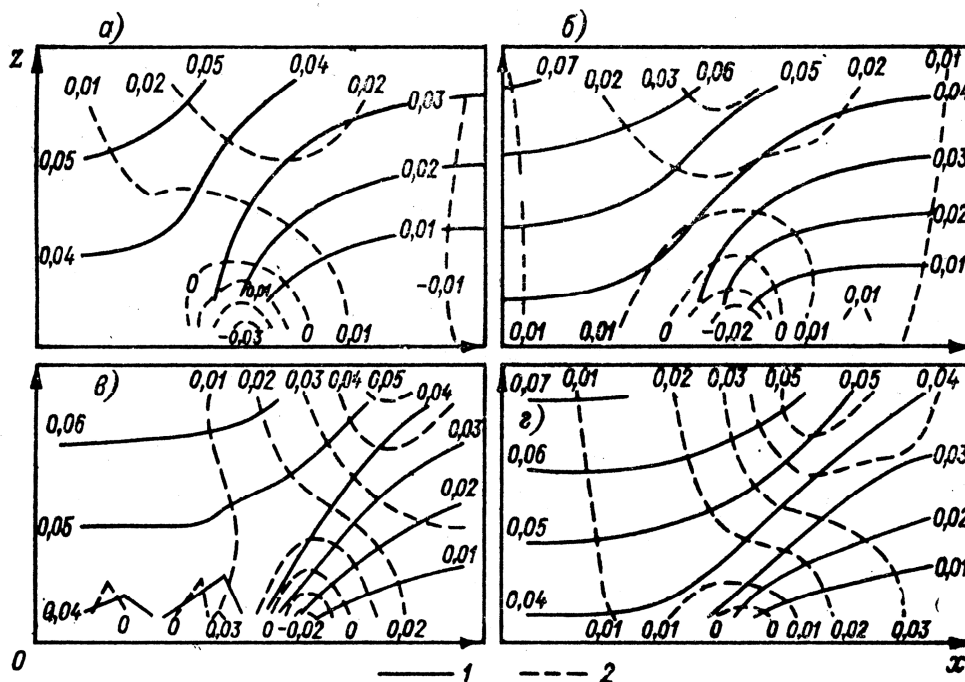
Приведем результаты численного решения полностью нелинейной задачи об эволюции бароклинно- и баротропно-неустойчивых волн с помощью квазигеострофических и полных уравнений, согласно работе Мудрика (*Mudrick, 1974*) (рис. 2.16, 2.17).



**Рис. 2.16.** Поле давления на нижнем уровне (а, в, д) и плавучести  $\theta' / \theta$  (б, г, е) в бароклинно- и баротропно-неустойчивой волне со временем удвоения 27 ч:  
а, б – начальное поле ( $t = 0$ ), разность давлений  $B - H = 21$  гПа;  
в, г – квазигеострофическое решение,  $t = 144$  ч,  $B - H = 21$  гПа;  
д, е – решение полных уравнений,  $t = 144$  ч,  $B - H = 45$  гПа.

Полностью развитые нелинейные режимы неустойчивости изучаются в настоящее время главным образом методом численного моделирования, однако много принципиально важных результатов было получено (во второй половине XX века) методом лабораторного моделирования в кольцевых вращающихся каналах, внутренние и внешние стенки которых имеют различную температуру, а также с цилиндрическими контейнерами, вращающимися вокруг оси цилиндра. Жидкость в неравномерно нагреваемых вращающихся

сосудах становится бароклинно-неустойчивой, когда достигается определенный критический горизонтальный градиент температуры, зависящий от скорости вращения.



**Рис. 2.17.** Поперечные разрезы фронтов в развивающемся циклоне в момент  $t = 144$  ч с начала роста бароклинно- и баротропно-неустойчивой волны: 1 – изолинии отклонений температуры от начального значения, 2 – изолинии параллельной фронту составляющей скорости ветра (безразмерные значения); а, б – теплый и холодный фронты в квазигеострофической модели, в, г – то же в модели с полными уравнениями.

В дальнейшем, в зависимости от чисел Россби и разности температур стенок, обнаруживается три основных нелинейных режима:

1. *Режим стационарных волн.* В потоке формируются гребни и ложбины, оси которых ориентированы меридионально или под углом к меридиану, и такие возмущения сохраняются продолжительное время, причем их амплитуда, форма и длина волны не изменяются.

2. *Режим vascillations.* По-русски этот термин обозначается как «васцилляции», само же это слово переводится, в частности, как «мерцания». Это также регулярный режим, однако гребни и ложбины испытывают медленные периодические изменения во времени: это либо изменения амплитуды волн (amplitude vascillations), либо изменения ориентации гребней и ложбин – по-

ворот их осей вперед и назад при небольшом одновременном изменении амплитуды (form vascillations), либо, наконец, периодическое изменение волнового числа (wavenumber vascillation). Период мерцаний не менее чем на порядок превышает период волны.

3. *Режим нерегулярных бароклинных волн или геострофической турбулентности.* Элементы геострофической турбулентности – это вихри, передающие свою кинетическую энергию через нелинейные взаимодействия движениям других масштабов.

Регулярные режимы стационарных волн и мерцаний находят свои аналоги в атмосферных процессах планетарного масштаба, т. е. в системе движений общей циркуляции атмосферы, тогда как режим геострофической турбулентности более характерен для синоптических масштабов, для циклонов и антициклонов средних широт.

### Инерционные волны. Симметричная неустойчивость

Перейдем к анализу задачи об устойчивости движений меньших масштабов, чем те, какие соответствуют бароклинной и баротропной неустойчивости. Именно, рассмотрим движения при числах Россби  $Ro = U / fL$  порядка  $10^{-2} - 10^{-1}$ . При таких  $Ro$  силу Кориолиса необходимо принимать во внимание, но нельзя пренебрегать вертикальными ускорениями, т. е. негидростатичностью, хотя приближение Буссинеска принимать все-таки можно (имея в виду, что при больших характерных скоростях  $U$  такое приближение является довольно грубым).

Будем считать основной поток геострофическим, гидростатическим, термически стратифицированным ( $N^2 \neq 0$ ), его скорость – зависящей от высоты ( $\bar{u} = \bar{u}(z)$ ). Температура зависит как от  $z$ , так и от поперечной координаты  $y$ , поскольку имеет место соотношение термического ветра

$$f \frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}.$$

Таков основной поток. Фактически он не отличается от основного потока в задаче о бароклинной неустойчивости. Возмущения в общем случае будем считать вязкими, зависящими от  $x, y, z, t$ . Запишем без вывода линеаризованные уравнения для возмущений, причем ограничимся  $f$ -плоскостью в связи с меньшими масштабами.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial x} + \nu_1 \nabla^2 u' + \nu_2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + f v',$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P'}{\partial y} + \nu_1 \nabla_2^2 v' + \nu_2 \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} - f u', \\
\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial z} &= -\frac{g \theta'}{\bar{\theta}} + \nu_1 \nabla_2^2 w' + \nu_2 \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} &= \mu_1 \nabla_2^2 \theta' + \mu_2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Коэффициенты системы зависят только от  $z$ , поэтому решение будем искать в виде волн (нормальных мод) с амплитудными функциями, зависящими также от  $z$ :

$$S' = \hat{S}(z) \exp(kx + ly + \omega t).$$

После исключения  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{P}, \hat{\theta}$  систему можно свести к одному обыкновенному уравнению 8-го порядка относительно  $\hat{w}$ , которое (благодаря учету вязкости) не будет иметь особых точек. Однако ввиду громоздкости и сложности получаемого уравнения и трудностей, возникающих при его численном решении в связи с высоким порядком, этим уравнением при общем виде зависимостей  $\bar{u}(z), \bar{\theta}(z)$  редко пользуются. В различных публикациях рассмотрены те или иные упрощения этой задачи.

Так, в отсутствие вязкости и теплопроводности ( $\mu_{1,2} = \nu_{1,2} = 0$ ) система (2.51) сводится к уравнению

$$\begin{aligned}
D_2 \hat{w} [f^2 - (\omega + k\bar{u})^2] + 2D \hat{w} \bar{u} f [il - \frac{kf}{\omega + k\bar{u}}] + \hat{w} [\bar{u}' k (\omega + k\bar{u}) + \\
(k^2 + l^2)(\omega + k\bar{u})^2 - N^2(k^2 + l^2) + ifl(\bar{u}'' - \frac{2k\bar{u}''^2}{\omega + k\bar{u}})] = 0,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$D = \frac{d}{dz}, \dots, D_2 = \frac{d^2}{dz^2},$$

которое получается из невязкой системы, соответствующей (2.51), после исключения остальных амплитудных функций. Граничные условия: затухание возмущений на границах слоя ограниченной толщины  $H = H_2 - H_1$

$$z = H_1, H_2, \hat{w} = 0. \tag{2.53}$$

Вместе с граничными условиями получаем задачу на собственные значения частоты  $\omega$ . Действительные  $\omega$ , лежащие вне интервала

$$-k\bar{u}_{\max} - f, -k\bar{u}_{\max} + f \tag{2.54}$$

соответствуют несингулярным нейтральным волнам, которые в данном случае называются инерционно-гравитационными или гравитационно-гироскопическими колебаниями типа внутренних волн. Условие (2.54) выражает требование необращения в нуль коэффициента при старшей производной в уравнении (2.52). Роль восстанавливающей силы в данном случае играют сила плавучести и сила Кориолиса.

В невязкой среде такие нейтральные волны, как и волны Россби, могут существовать бесконечно долго, а при наличии вязкости они затухают. В реальных условиях квазиламинарной свободной атмосферы вязкость в среднем незначительна, поэтому колебания типа внутренних волн хотя и затухают, но все же существуют достаточно долго, и их можно считать важной составной частью атмосферных движений на интервале мезомасштабов.

Свойства нейтральных несингулярных мод хорошо видны на простом примере, когда, кроме этих волн, задача на собственные значения не имеет других решений: именно, на случае  $N^2 = \text{const}$ ,  $\bar{u} = \text{const}$ . Приняв для простоты, что начало координат располагается в середине слоя, при  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = -1$  и граничных условиях (2.53) получаем дисперсионное соотношение, из которого находим, что спектр собственных значений состоит из точек, соответствующих при неотрицательном подкоренном выражении действительным  $\omega$ :

$$\omega_n = -k\bar{u} \pm \sqrt{\frac{N^2(k^2 + l^2) + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 f^2}{\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 + k^2 + l^2}}. \quad (2.55)$$

Собственные значения ограничены значениями  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ , получаемыми при  $n = 1$  и знаках, соответственно, «+» и «-» перед корнем.

Обратим внимание на то, что действительные  $\omega_n$  существуют не только при  $N^2 > 0$  и  $N^2 = 0$ , но и при достаточно малых отрицательных  $N^2$ , которые соответствуют слабо-неустойчивой стратификации. При больших отрицательных  $N^2$  волны становятся растущими.

Как видно из (2.55), действительные  $\omega_n$  при отрицательных  $N^2$  возможны только благодаря наличию  $f$ . То есть благодаря наличию силы Кориолиса моды остаются нейтральными, а не растущими, даже при слабой конвективной неустойчивости.

Заметим также, что дисперсионное соотношение определяет целый спектр волн, частоты которых образуют две последовательности, соответствующие знакам «+» и «-» перед корнем и сходящихся справа и слева к точкам

$\omega_\infty = -k\bar{u} \pm f$ . Собственные функции  $n$ -го порядка обращаются в нуль  $n-1$  раз внутри интервала  $(-1, 1)$ .

В общем случае произвольных зависимостей скорости основного потока и его частоты Брента-Вайсяля от высоты спектр инерционно-гравитационных волн находится численно. Его структура даже при сложных профилях  $\bar{u}, N^2$  в основном аналогична (2.55).

Другая часть спектра собственных значений – действительные  $\omega$ , лежащие внутри интервала (2.54). Им соответствуют нейтральные волны, имеющие критический уровень.

Наконец, возможны комплексные собственные значения. Эта часть спектра более сложна для исследования, чем в задачах о баротропной, бароклинической или комбинированной неустойчивости. Не удастся получить такого простого необходимого условия неустойчивости, кроме как для случая  $l = 0$  (волны бегут вдоль оси  $x$ ). В этом простейшем случае необходимое условие неустойчивости тоже имеет далеко не простой вид

$$F_1(z, k, \omega)(N^2 - f^2) + F_2(z, k, \omega)\bar{u}'' + F_3(z, k, \omega)(\bar{u}')^2 = 0. \quad (2.56)$$

Здесь  $F_1, F_2, F_3$  – действительные функции. Из (2.56) видно, что в зависимости от соотношения сил плавучести и Кориолиса, а также от сдвига ветра необходимое условие неустойчивости может выполняться и в отсутствие точек перегиба скорости. Таким образом, в условиях нашей задачи могут дестабилизироваться и расти такие возмущения, которые в ранее рассмотренных задачах были устойчивы.

Еще одним важным отличием данной задачи является то, что для нее не выполняется теорема Сквайра. Следовательно, в данной задаче вывод о том, что максимальные показатели роста имеют волны, бегущие вдоль потока, сделать нельзя. Более подробный анализ, а также численные решения и лабораторные эксперименты показывают, что в зависимости от параметров задачи максимально неустойчивыми могут оказаться волны, распространяющиеся под различными углами к потоку. В частности не исключено, что наиболее неустойчивыми окажутся волны, фронт которых ориентирован параллельно ветру. Это и будет случай симметричной бароклинической неустойчивости в собственном смысле.

### Собственно симметричная неустойчивость

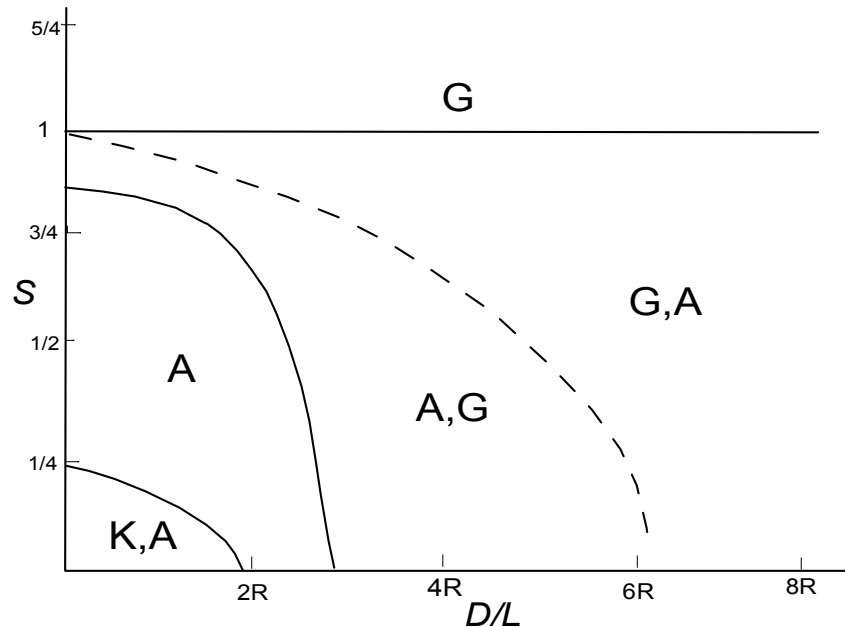
Чтобы выяснить, в каких условиях развивающиеся возмущения принимают форму продольных валов, надо исследовать зависимость собственных чисел от параметров задачи и найти ту область в их пространстве, где наиболее неустойчивыми оказываются возмущения с  $k = 0$ . В общем виде, т. е. для про-

извольных профилей  $u, \bar{\theta}$ , такое исследование пока не проведено. Однако имеются частные результаты, которые показывают, что такая область существует. Наиболее ранним является результат (Stone, 1970): при линейном профиле зонального ветра и постоянном числе Россби симметричный режим преобладает в интервале чисел Ричардсона

$$Ri = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta} / \partial z}{(d\bar{u} / dz)^2} \quad (2.57)$$

от 0,25 до 0,95. Этот вывод согласуется с результатами лабораторных экспериментов (описанных в обзоре Хайда и Мэйсона (Hide, Mason, 1975), обнаруживших область симметричных режимов, четко выделяющихся на режимной диаграмме.

Режимная диаграмма, полученная позже Стоуном (Stone, 1971) для основного потока модели Иди, показана на рис. 2.18.



**Рис. 2.18.** Режимная диаграмма зависимости типа неустойчивости (геострофической G, осесимметричной A (axisymmetric) и Кельвина-Гельмгольца K) от числа Ричардсона S и отношения D/L вертикального и горизонтального размеров системы (R – число Россби) по (Stone, 1971). На пунктирной линии максимальные показатели роста G и A равны.

Если ограничиться значениями параметров, соответствующих области симметричных режимов, можно выяснить закономерности поведения возму-



щений, которые в этом случае будут описываться уравнением (2.52) при  $k = 0$ :

$$D^2 \hat{w} (f^2 - \omega^2) + D \hat{w} \bar{u}' 2 i f l + \hat{w} [l^2 (\omega - N^2) + i l f \bar{u}'] = 0. \quad (2.58)$$

При  $\bar{u}'' = 0$  получаем уравнение с постоянными коэффициентами, и его решение ищется в виде  $\hat{w} = e^{imz}$ . Легче всего поддается анализу случай линейного профиля скорости и постоянного  $N^2$  (как в модели Eady). При таком основном потоке можно включить в рассмотрение и вязкость с теплопроводностью. Получаем дисперсионное соотношение, представляющее собой квадратное уравнение относительно  $i\omega$ . При числе Прандтля  $Pr = 1$  решение его имеет вид

$$i\omega = -(\nu_1 l^2 + \nu_2 m^2) \pm \sqrt{-\frac{N^2 l^3 + m^2 f^2 - 2 f u' l m}{m^2 + l^2}}. \quad (2.59)$$

Действительные положительные собственные значения  $i\omega$ , соответствующие растущим волнам, могут появиться, если подкоренное выражение положительно и достаточно велико по модулю. Вязкость играет стабилизирующую роль, и ее эффект тем больше, чем короче волны. Кроме вязкости, стабилизирующее влияние оказывает устойчивая термическая стратификация и сила Кориолиса. Дестабилизирующую (т. е. способствующую появлению растущих волн) роль играет сдвиг ветра.

Имеются также нейтральные волны ( $i\omega = 0$ ) и комплексные  $i\omega$ , которые образуют дискретный спектр гравитационно-инерционных мод, затухающих под действием вязкости.

Дальнейший анализ показывает, что в отсутствие вязкости положительные действительные  $i\omega$  возможны при выполнении хотя бы одного из двух неравенств:

$$\begin{aligned} N^2 + f^2 &< 0, \\ \bar{q} = f^2 (N^2 - (\bar{u}')^2) &< 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Это фактически означает, что при устойчивой стратификации симметричная неустойчивость может возникнуть только при больших сдвигах ветра, средних по слою.

### Условная симметричная неустойчивость

Условия развития симметричной неустойчивости становятся более благоприятными, если слой воздуха в бароклинной зоне достигает состояния насыщения в результате упорядоченного подъема. В этом случае вместо потенциальной температуры следует рассматривать какую-либо величину, инвариант-

ную при фазовых переходах влаги. Обычно используют эквивалентно-потенциальную температуру  $\theta_e$  или потенциальную температуру смоченного термометра.

Эквивалентно-потенциальная температура  $\theta_e$  – это температура, которую принял бы воздух при адиабатическом процессе, если бы сначала весь содержащийся в нем водяной пар сконденсировался при неизменном давлении и выделившаяся скрытая теплота пошла на нагревание воздуха, а затем воздух был бы приведен к нормальному давлению:

$$\theta_e = \left( T + \frac{Lm}{c_p} \right) \left( \frac{1000}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

Здесь в первых скобках – так называемая эквивалентная температура, которую мы еще будем использовать позже ( $m$  – отношение смеси, близкое к массовой доле влаги;  $L$  – теплота парообразования).

Потенциальная температура смоченного термометра – это температура смоченного термометра, адиабатически приведенная к стандартному давлению, а температура смоченного термометра – это температура, которую примет воздух, если адиабатически испарить в него воду до полного его насыщения.)

В насыщенном воздухе частота Брента-Вяйсяля будет определяться через влажноадиабатический градиент, который меньше сухоадиабатического и, значит, для получения отрицательного  $\bar{q}$  необходимы меньшие сдвиги ветра, чем в ненасыщенном воздухе.

Отсюда делается вывод, что симметричная неустойчивость воздуха, достигшего насыщения в результате упорядоченного подъема, возникает в атмосфере чаще, чем симметричная неустойчивость сухого воздуха.

### **Метеорологический контекст задачи о симметричной неустойчивости**

Инерционная и симметричная неустойчивость является промежуточной между собственно бароклиной неустойчивостью и неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца. Вследствие наличия двух восстанавливающих сил свойства симметричной неустойчивости отличаются своеобразием. Промежуточное положение симметричной неустойчивости заставляло исследователей искать границы между этим видом неустойчивости и соседними. Если с неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца разграничение понятно – она наблюдается в отсутствие силы Кориолиса, т. е. при  $f = 0$ , то с бароклиной неустойчивостью проблема сложнее. Очевидно, что эта последняя должна соответство-

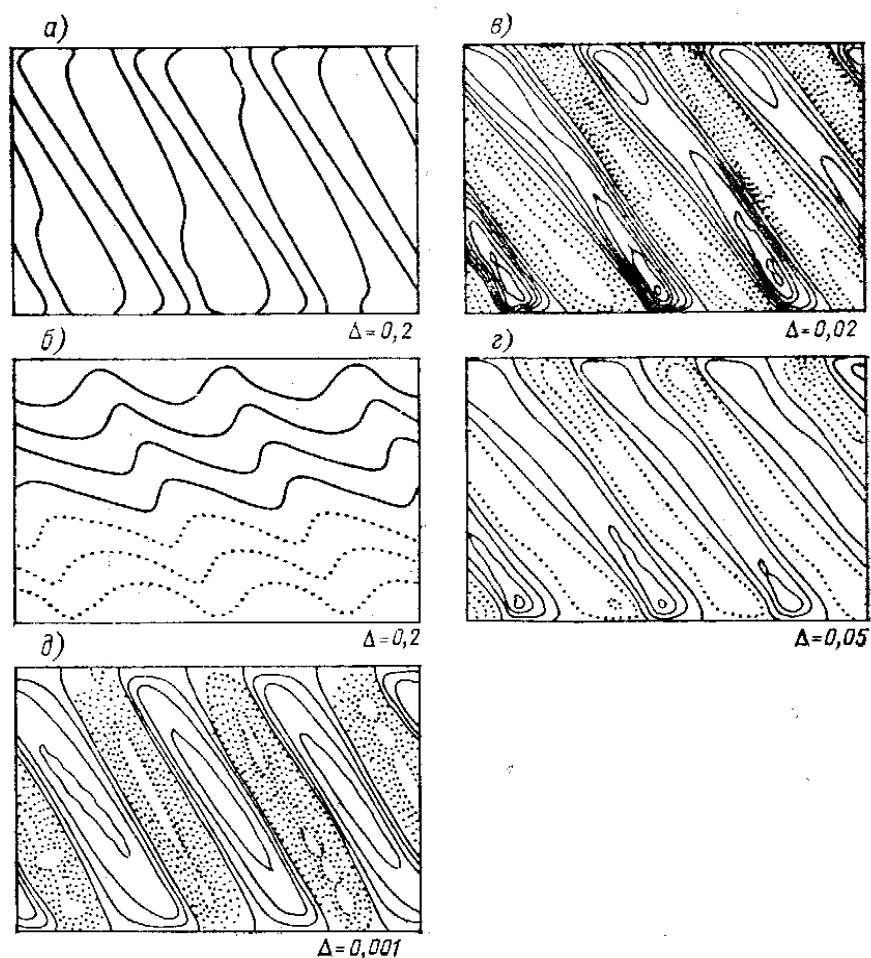
вать случаю  $l = 0$ . Кроме того, Стоун (Stone, 1966) показал, что бароклиная неустойчивость типа Иди, характеризующаяся максимальными показателями роста при  $l = 0$ , наблюдается при всех  $Ri > 0,95$ . При меньших  $Ri$  появляется максимум показателя роста у волн с малым  $k$  и большими  $l$ .

Много работ было посвящено исследованию симметричных режимов в связи с материалами лабораторных экспериментов с вращающимися контейнерами, внешняя боковая стенка которых подогревается. Именно этим экспериментам мы обязаны названием «симметричная неустойчивость»: при не очень больших скоростях вращения в таких установках возникают системы концентрических полос восходящих движений, симметричных относительно оси вращения. Эксперименты были призваны воспроизвести условия развития возмущений в атмосфере Земли и других планет.

Условия, когда сила Кориолиса не пренебрежима, но и не играет столь определяющей роли, как при циклогенезе, наблюдаются на горизонтальных масштабах движений от нескольких десятков до 100–200 км. Это, по международной классификации, так называемый  $\beta$ -мезомасштаб. В атмосфере ему соответствуют движения в бароклиных зонах атмосферных фронтов, формирующие их внутреннюю структуру.

С развитием метеорологической радиолокации и появлением метеорологических спутников были обнаружены широко распространенные в зонах атмосферных фронтов и циклонов полосы повышенной интенсивности осадков, которые связаны с затопленными в слоисто-дождевой облачности конвективными облаками. Эти полосы вытянуты по ветру и имеют длину волны 60–80 км. В этой связи симметричная неустойчивость стала рассматриваться как возможный механизм генерации таких полосовых структур. В настоящее время эта гипотеза продолжает обсуждаться, в особенности в рамках задачи об условной симметричной неустойчивости. Поскольку этот последний вид неустойчивости, как было сказано выше, должен наблюдаться в атмосфере чаще, чем симметричная неустойчивость сухого воздуха, то продольные облачные валы, развивающиеся при разрешении симметричной неустойчивости, должны преимущественно возникать в толще слоистой фронтальной облачности. Возможны и облачные валы с безоблачными промежутками. Слабые восходящие движения, имеющие место в гребнях продольных валов, развивающихся при симметричной неустойчивости, могут выполнять роль вынуждающих факторов для развития конвективной неустойчивости меньшего масштаба (рис. 2.19).

С симметричной неустойчивостью связывают некоторые другие явления. Так, на больших планетах Солнечной системы – Юпитере, Сатурне – обнаружены широкие полосы, параллельные экватору, симметричные относительно осей вращения и охватывающие всю планету. Поскольку числа Россби на планетарных масштабах там относительно малы, – появление этих полос связывают с симметричной неустойчивостью в мощных газовых слоях этих планет.



**Рис. 2.19.** Результаты решения нелинейной задачи об устойчивости основного потока модели Иди – стационарные симметричные волны при  $Ri=0,83$ ,  $Ro = 3,0$ ;  $E = 0,001$ ;  $Pr = 2,0$  (Miller, 1948); поля температуры (а), зональной скорости (б), возмущений температуры (в), возмущений зональной скорости (г), функции тока (д);  $\Delta$  – интервал значений функции, через который проведены изолинии положительных (сплошные линии) и отрицательных (пунктир) значений.

Сходные формы движений наблюдаются в морях и океанах. Часто можно видеть продольные полосообразные системы движений, известные как циркуляции Лэнгмюра и обнаруживаемые по вытянутым по ветру полосам пены, обломков и пр. (так называемые ветровые дорожки). Они развиваются в определенном диапазоне скоростей ветра. Траектории частиц в этих полосах имеют винтовой характер, как это установил Лэнгмюр. В разное время было выдвинуто несколько гипотез о происхождении этих циркуляций под действием той или иной разновидности гидродинамической неустойчивости, в том

числе и симметричной неустойчивости. Возражения против этой последней гипотезы состояли в том, что, по оценкам, сила Кориолиса в таких движениях не может играть существенной роли. Надо иметь в виду, что продольные вала могут развиваться и за счет других механизмов, в том числе и таких, когда играют роль только вязкость и сила инерции. Единого мнения о природе циркуляций Ленгмюра в настоящее время не существует.

В целом следует отметить, что инерционно-симметричная неустойчивость применительно к земной атмосфере не имеет такого большого значения, как бароклиная неустойчивость. Она представляет интерес как промежуточная форма неустойчивости, при которой как сила Кориолиса, так и сила плавучести играют роль восстанавливающих сил. Этот вид неустойчивости рассматривается как основной механизм образования длинноволновых полосовых структур в полях облачности и осадков в бароклиных зонах атмосферных фронтов.

На рис. 2.20 показаны полосовые структуры в зонах теплого и холодного фронтов по результатам самолетных измерений ЦАО (1984 г.). На поперечных к фронту разрезах видны наклонные зоны повышенной и пониженной бароклинности. Горизонтальные длины волн таких структур, по этим данным, варьируют от 100 до 400 км, вертикальные – от 1 до 4 км, средний наклон к горизонту составляет  $0,5-1^\circ$ . Сравнение горизонтальных длин волн слоистых структур со значениями средних по переходному слою горизонтальных градиентов температуры показывает, что чем больше горизонтальный градиент температуры, тем меньше длина волны. Имеется постоянный сдвиг фаз между возмущениями температуры и нормальной к фронту составляющей скорости, согласующийся с теорией симметричной неустойчивости.

Исследование энергетики неустойчивых симметричных возмущений показывает, что основным источником их энергии является кинетическая энергия основного потока, что дает основание называть этот вид неустойчивости «баротропной неустойчивостью бароклиного потока».

## **Конвективная неустойчивость в покоем слое.**

### **Гравитационные волны**

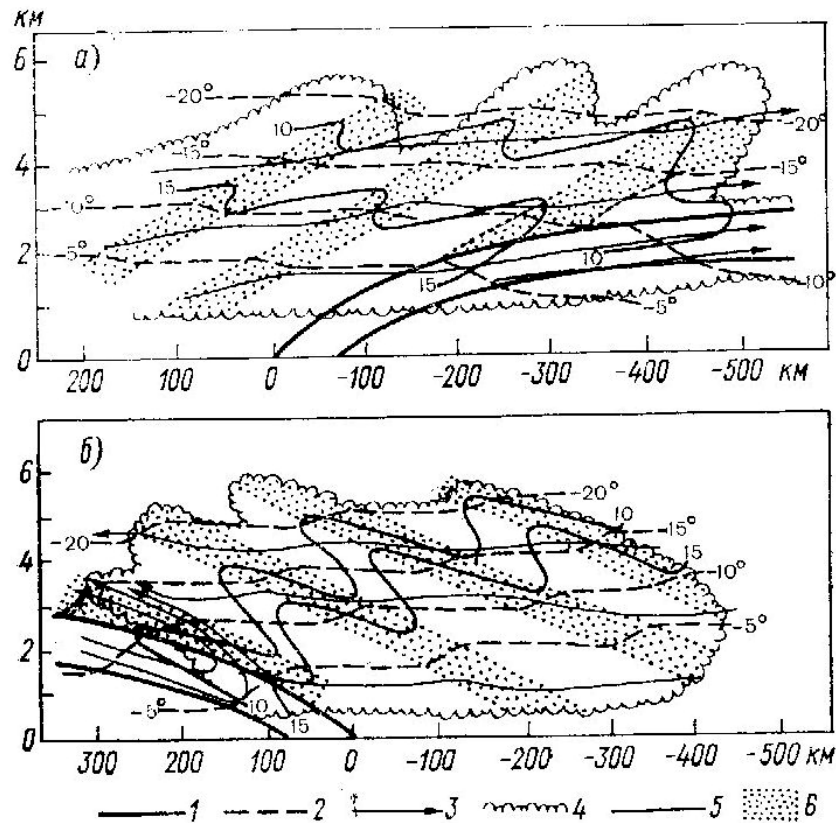
При больших числах Россби сила Кориолиса пренебрежима. В основном потоке, считаемом невязким и покоящимся, температура будет зависеть от  $z$  произвольным образом. Если же имеется вязкость (и теплопроводность), то профиль скорости в основном потоке следует считать линейным, т. е. вертикальный градиент температуры будет постоянным. Давление также зависит только от  $z$ .

Представляя возмущения в виде нормальных мод:

$$S' = \hat{S}(z)e^{i(kx+ly+\omega t)},$$

не повторяя процедуры линеаризации, запишем результирующее уравнение относительно амплитудной функции вертикальной составляющей скорости в невязком случае:

$$\omega^2 \left[ \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} - (k^2 + l^2) \bar{w} \right] = N^2 \bar{w} (k^2 + l^2). \quad (2.61)$$



**Рис. 2.20.** Схема мезомасштабной структуры теплого (а) и холодного (б) фронтов по данным самолетных измерений (*Shakina et al, 1984*): 1 – границы бароклинной зоны фронта; 2 – изотермы; 3 – изолинии возмущений нормальной составляющей ветра; 4 – границы облаков; 5 – изолинии  $\theta'$ ; 6 – гипербароклинные зоны.

Если частота Брента-Вейселя постоянна, то в этом уравнении коэффициенты постоянны, и решение будет

$$\bar{w} = e^{imz}.$$

И тогда

$$i\omega = \left[ -\frac{N^2(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + m^2} \right]^{1/2}. \quad (2.62)$$

Это алгебраическое уравнение – дисперсионное соотношение – позволяет находить  $\omega$  как функцию частоты Брента-Вяйсяля и волновых чисел. Если  $m$  подобрать так, чтобы удовлетворялись однородные граничные условия, то из этого соотношения можно найти собственные значения  $\omega$  при известных параметрах задачи – волновых числах и  $N^2$ .

Без вывода запишем также аналогичное дисперсионное соотношение для вязкой задачи при числе Прандтля, равном 1, и в приближении Буссинеска:

$$i\omega = -\left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} (k^2 + l^2) + a^{-2} m^2 \right] \pm \sqrt{\frac{\text{Ra}}{a^4} \frac{(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + a^{-2} m^2}}. \quad (2.63)$$

Здесь  $a = H/L$  – коэффициент анизотропии;  $\text{Ra}$  – число Рэлея, являющееся основным параметром конвективной неустойчивости:

$$\text{Ra} = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{H^4}{\mu_2^2} = -N^2 \frac{H^4}{\mu_2^2}. \quad (2.64)$$

Рост возмущений, ассоциирующийся с положительными действительными  $i\omega$ , возможен в невязкой среде только при неустойчивой стратификации,  $N^2 < 0$ , а в вязкой среде – при  $\text{Ra} > \text{Ra}_{\text{кр}}$ . Критическое значение  $\text{Ra}$  соответствует границе устойчивости,  $i\omega = 0$ . Мнимая часть  $i\omega$  в обеих задачах равна нулю: конвективные ячейки в покоящемся слое не имеют физической фазовой скорости.

Этот простейший случай так называемой упорядоченной конвекции, называемой также ячейковой циркуляцией и целлюлярной конвекцией, впервые рассмотрен Бенаром (*Benard, 1900*).

В выражение для  $i\omega$  волновые числа входят только в виде комбинации  $k^2 + l^2$ . Это означает, что показатели роста одинаковы у возмущений, имеющих одинаковое значение этой комбинации, независимо от соотношения конкретных значений волновых чисел по осям координат. Например, параллельные валы ( $k = 0$  или  $l = 0$ ) и квадратные ячейки ( $k = l$ ) при одном и том же  $k^2 + l^2$  имеют одинаковые показатели роста, и, следовательно, нельзя указать преобладающую форму конвекции в покоящемся слое. Это так называемый **принцип неопределенности Рэлея**.

При устойчивой стратификации ( $N^2 > 0$ ) возможны движения типа внутренних гравитационных волн, т. е. колебаний частиц около положения равно-

веса, которым соответствуют комплексные значения  $i\omega$ , мнимая часть которых

$$(i\omega)_i = \left[ \frac{N^2(k^2 + l^2)}{k^2 + l^2 + m^2} \right]^{1/2} \quad (2.65)$$

описывает физическую частоту, а действительная часть

$$(i\omega)_r = -\left[ \mu_1(k^2 + l^2) + \mu_2 m^2 \right] \quad (2.66)$$

характеризует скорость затухания колебаний под действием вязкости. В частности, при  $m = 0$ , что соответствует бесконечно большой длине волны по вертикали (бесконечная толщина слоя), частота внутренних гравитационных волн в отсутствие вязкости равна

$$\omega = N.$$

Таким образом, частота Брента-Вайсяля есть частота внутренних гравитационных волн в невязком покоящемся слое бесконечной толщины.

Примером гравитационных волн являются горные волны, возникающие при обтекании горных хребтов (рис. 2.21).

Горные волны влияют на полет воздушных судов, вызывая циклическую болтанку. При больших амплитудах в их гребнях возникают турбулентные пятна (в результате вторичной неустойчивости, см. ниже).

### **Конвективная неустойчивость плоскопараллельного потока со сдвигом ветра. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца**

Если имеется средний ветер со сдвигом скорости, то вместо приведенных выше уравнений получаем в невязком случае так называемое уравнение Тэйлора-Гольдштейна

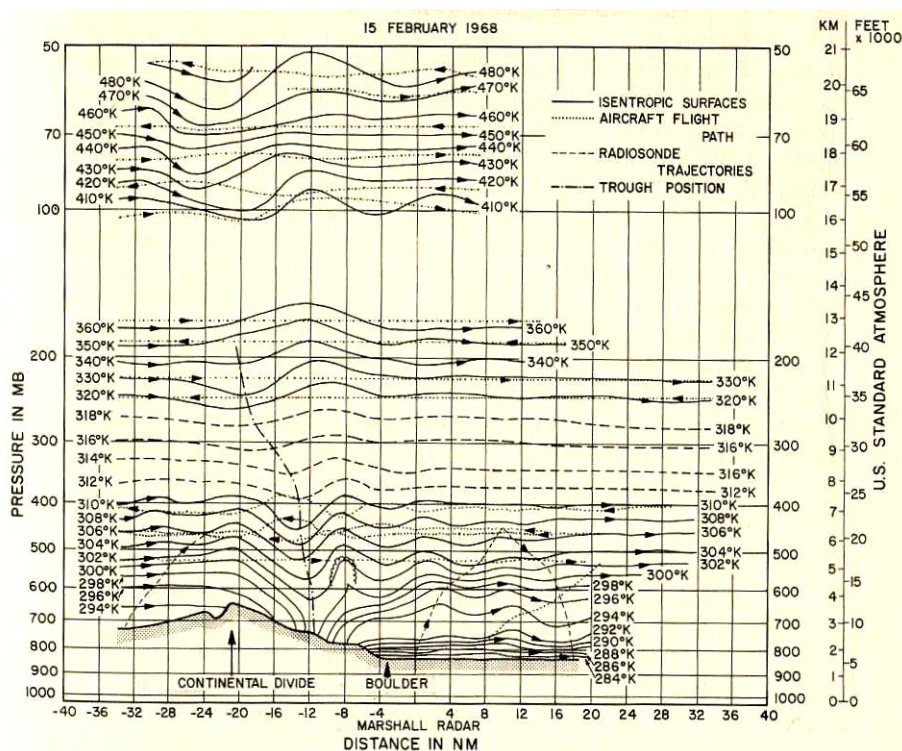
$$(\omega + k\bar{u})^2 \left[ D^2 - (k^2 + l^2) \right] - k(\omega + k\bar{u}) \bar{u}'' + (k^2 + l^2) N^2 \bar{w} = 0, \quad (2.67)$$

которое при безразличной стратификации превращается в уравнение Рэлея, а в вязком случае – в уравнение Орра-Зоммерфельда (четвертого порядка)

$$(\omega + k\bar{u})^2 \left[ D^2 - (k^2 + l^2) \right] \bar{w} - k(\omega + k\bar{u}) \bar{u}'' \bar{w} = -i\mu \left[ D^2 - (k^2 + l^2) \right]^2 \bar{w}. \quad (2.68)$$

При неустойчивой стратификации преобладающей формой конвекции становятся валы, вытянутые по ветру. Они характерны для слоев с горизонтальным градиентом температуры (фронтальные зоны и зоны значительной адвекции холода или тепла). Часто их можно наблюдать в тыловой части циклона.





**Рис. 2.21.** Вертикальный разрез потенциальной температуры (K) в широтном направлении по результатам самолетных, радиозондовых и радарных измерений над США (Lilly, Toutenbooft, 1969): подветренные волны при обтекании хребта.

При устойчивой стратификации уравнение Тэйлора-Гольдштейна имеет как неустойчивые решения (волны Кельвина-Гельмгольца), так и решения типа внутренних гравитационных волн (нейтральные несингулярные). Согласно теореме Майлса (Miles, 1961), необходимым условием неустойчивости является наличие в потоке точки, в которой число Ричардсона меньше критического значения  $1/4$ :

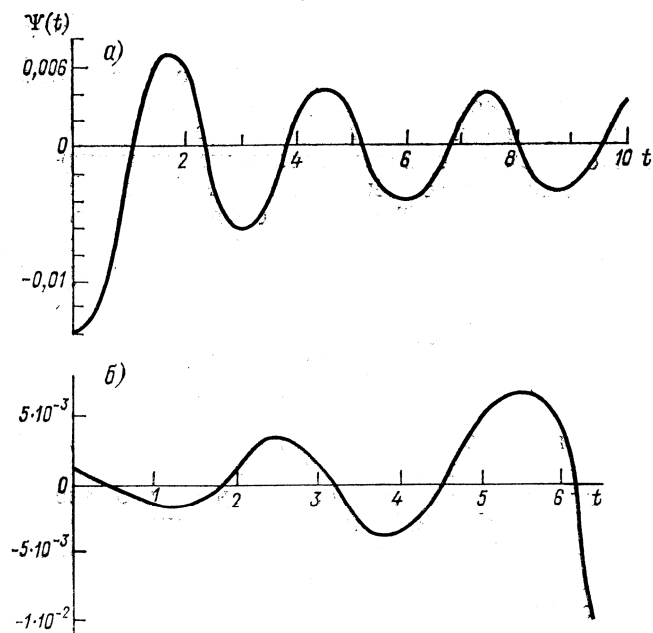
$$Ri = \frac{N^2}{(\bar{u}')^2} < \frac{1}{4}. \quad (2.69)$$

При числах  $Ri$ , превышающих критические, существуют нейтральные несингулярные гравитационные волны, бегущие как по потоку, так и против потока.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца возникает при больших сдвигах ветра, например в струйных течениях.

В нелинейном режиме, т. е. на стадии дальнейшего роста амплитуд (когда допущение «бесконечной малости» амплитуд возмущений уже неприменимо), неустойчивые по линейной теории волны могут либо продолжать и далее расти по амплитуде, либо замедлить свой рост и выйти на режим стационарных волн. Могут наблюдаться все три ранее рассмотренных нами нелинейных режима – стационарных волн (конвективных ячеек), мерцаний и нерегулярный режим, который ведет к турбулизации потока.

Режим нелинейной неустойчивости более характерен для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (рис. 2.22), режим стационарных волн – для упорядоченной конвекции. Однако и в случае конвекции, в особенности в пограничном слое, при сильной неустойчивости может развиваться так называемая термическая турбулентность. Выбор режима зависит от того, насколько велики запасы энергии в основном потоке, которая может быть реализована растущими возмущениями. В случае конвективной неустойчивости это потенциальная энергия вертикальной стратификации – убывание потенциальной температуры с высотой, вследствие чего сила плавучести является дестабилизирующей. В случае неустойчивости Кельвина-Гельмгольца сила плавучести является стабилизирующей, но при достаточно большом вертикальном сдвиге ветра возмущения могут расти за счет неоднородного распределения кинетической энергии в основном потоке.



**Рис. 2.22.** Функция тока  $\Psi(t)$  при  $z = 0$ : закритическое равновесие (а); закритическая неустойчивость (б) (Коган, Шакина, 1974).

Неустойчивые волны Кельвина-Гельмгольца на стадии нелинейного роста приводят к образованию турбулентных слоев и пятен в устойчиво стратифицированной атмосфере с большими сдвигами ветра (так называемая турбулентность в ясном небе). Турбулентные пятна в устойчивой свободной атмосфере могут возникать и под действием внутренних гравитационных волн большой амплитуды. В этом случае развивается так называемая «вторичная неустойчивость».

При распространении внутренних волн в неоднородной среде они могут расти по амплитуде или приобретать сдвиг фаз, в результате чего на их гребнях может возникнуть зона  $Ri < 1/4$  или даже зона  $N^2 < 0$  (конвективной неустойчивости). В зоне локальной неустойчивости, за счет роста более мелкомасштабных возмущений, может развиваться турбулентность, к которой будет передаваться часть энергии внутренней волны. Такой механизм, ограничивающий рост амплитуд волн и приводящий к образованию «вкрапленных» в ламинарный поток турбулентных пятен, называют вторичной неустойчивостью (конвективной, либо Кельвина-Гельмгольца). Амплитуда, при которой на гребне волны появляется граничное для неустойчивости значение параметра  $N^2$  либо  $Ri$ , называется критической амплитудой, либо амплитудой насыщения. Наличие механизма вторичной неустойчивости, как одной из причин возникновения вкрапленных в поток турбулентных зон, обуславливает возможность появления турбулентности в ясном небе при практически любой стратификации температуры и ветра. Однако «первичная» неустойчивость Кельвина-Гельмгольца имеет большее значение с точки зрения авиационного прогноза, поскольку она обычно приводит к развитию более обширных турбулизованных слоев, тогда как вторичная неустойчивость порождает небольшие турбулентные пятна в квазиламинарном потоке.

Конвективная неустойчивость на стадии нелинейного роста образует стационарные ячейки главным образом в тех случаях, когда неустойчивые слои имеют небольшую вертикальную мощность и запасы энергии неустойчивости в них невелики. Если же неустойчивость наблюдается в мощных слоях, то нелинейное развитие неустойчивых возмущений происходит иначе. В реальной атмосфере, вне фронтальных зон развиваются поля кучевых облаков, в которых затем происходит «поедание» более крупными облаками окружающих мелких облаков (режим типа «мерцаний волнового числа»). Образуются кучево-дождевые одноячейковые облака, из которых выпадают осадки. В конвективных полосах, в том числе во фронтальных зонах, наблюдается тот же процесс роста отдельных облаков за счет окружения. Развиваются крупные конвективные образования (мезомасштабные конвективные системы, МКС) или группы (кластеры) Сб, разделенные безоблачными промежутками. Поскольку для атмосферной конвекции характерен суточный ход (вечером она ослабевает), то время, отпущенное ей для нелинейного роста, ограничено. Однако при сильной конвективной неустойчивости и при наличии общего восхождения, как это имеет место в циклонических областях и во

фронтальных зонах, добавляется вынуждающий эффект, усиливающий рост конвективных облаков.

В монографии С.М. Шметера (*Шметер, 1987*) приводятся данные об изменениях структуры полей кучевых облаков в течение дня: утром облака распределены более или менее равномерно, при большом количестве облаков средних размеров. После полудня крупные, развивающиеся облака часто окружены большим количеством мелких облаков, образуя группы. Линейные размеры таких групп или скоплений – кластеров – колеблются от нескольких до сотен километров. Образование крупных кластеров – характерная особенность стадии максимального развития грядовой конвекции на фронтах и на линиях шквалов. Мелкие группы образуются в послеполуденные часы во внутримассовых полях конвективных облаков. Диаметр центрального облака – около 1,5 км, окружающих его мелких облаков – сотни метров. Соседние группы разделены безоблачными промежутками и располагаются на расстоянии нескольких километров друг от друга. В случаях наиболее интенсивной конвекции (на атмосферных фронтах, в зонах конвергенции ветра) формируются МКС, представляющие собой группы из нескольких мощных кучево-дождевых облаков, вершины которых покрыты общей перистой «шапкой». С такими МКС связаны самые интенсивные и длительные ливневые осадки в средних широтах. В тропиках это основная форма осадкообразующей облачности.

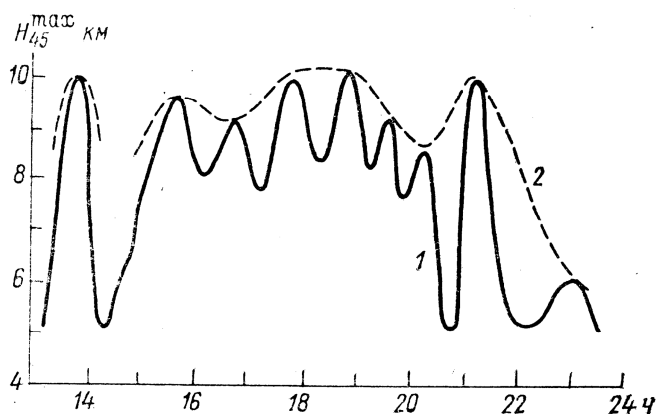
На материалах радиолокационных наблюдений в Молдавии А.А. Желнин и А.Н. Старостин (*Желнин, Старостин, 1987*) показали, что грозовые и градовые облака возникают и развиваются на гранях полигональных ячейковых структур с характерными размерами 30–40 км. Вдоль этих граней происходит их смещение, а в вершинах многоугольников – слияние двух облаков, либо разделение облака на две части. (Аналогичный процесс укрупнения ячеек наблюдается в лабораторных установках со слоем жидкости в сосуде с перегретой нижней границей.) При этом интересно, что высоты верхних границ облаков испытывают квазипериодические колебания.

На рис 2.23 показано характерное изменение во времени высоты радиозха заданной интенсивности от наиболее мощного облака в зоне обзора радиолокатора. Рассматривались также изменения высоты радиозха от всех конкретных облаков в пределах определенного облачного скопления. В обоих случаях наблюдалась одна и та же квазипериодичность, причем сдвиг фаз практически отсутствовал в пределах зоны наблюдений.

Применительно к наиболее мощным облакам в зоне обзора, наличие квазипериодических изменений отмечено в 90 % случаев. В 76 % случаев период колебаний составил  $1 \text{ ч} \pm 15 \text{ мин}$ , более длинные периоды встречались в 10 % случаев. На рисунке период модуляций можно оценить как 3 ч. Колебания высоты верхней границы испытывают не только наиболее крупные облака, но и весь облачный ансамбль, по крайней мере, в радиусе 100 км.

В пограничном слое атмосферы при сильном перегреве подстилающей поверхности развивается режим термической турбулентности, в особенности

при наличии вышележащего устойчивого задерживающего слоя (например инверсия оседания в антициклоне). Развитие конвекции в таких условиях в утренние и дневные часы проходит стадии ячеек и отдельных термиков (поднимающихся струй или «пузырей»), а при дальнейшем прогреве – этап интенсивного взаимодействия конвективных элементов, что обуславливает перемешивание воздуха. В результате развивается «перемешанный слой» со стратификацией, близкой к безразличной. Не только потенциальная температура, но и ветер в этом слое мало меняется с высотой. Наличие такого слоя учитывается в некоторых способах прогноза конвективных явлений по методу частицы.



**Рис. 2.23.** Зависимость от времени высоты изоповерхности радиоэха 45 дБз ( $H_{45}^{\max}$ ) в пределах области обзора метеорологического радиолокатора (1) и огибающая колебаний этой высоты (2) 12 июля 1983 г. (Желнин, Старостин, 1987).

## Характеристики конвективной неустойчивости в атмосфере

Наличие конвективной неустойчивости в атмосфере, глубина неустойчивых слоев, запасы энергии конвективной неустойчивости оцениваются по результатам радиозондирования, а в тех случаях, когда речь идет об оценках этих характеристик на значительной территории – по результатам объективного анализа. Прогностические значения их определяются по данным численного прогноза. Во всех случаях для таких оценок используются данные о температуре и влажности у земли и на изобарических поверхностях.

Для этой цели существуют специальные диаграммы, на которых в координатах температура – давление нанесены кривые, соответствующие сухим и влажным адиабатам, т. е. графики изменения температуры частиц при адиабатическом подъеме, в отсутствие и при наличии насыщения водяного пара.

В России используется так называемая аэрологическая диаграмма, в англоязычной литературе – skew-T – logP diagram (plot).

Основными величинами, характеризующими конвективную неустойчивость, являются:

– *Уровень пересечения кривой стратификации атмосферы с кривой состояния поднимающейся с некоторого уровня частицы.* В России этот уровень обычно называется уровнем конвекции, в англоязычной литературе – Level of neutral buoyancy, LNB (уровень нейтральной плавучести). Считается, что он является оценкой верхней границы конвективных облаков. С учетом сказанного выше можно считать, что это некая осредненная приближенная оценка высоты верхней границы. Другое название этого уровня – Equilibrium level (равновесный уровень). Это уровень, на котором температура частицы, адиабатически поднимающейся от земли (из нижнего 500-метрового слоя), становится равной температуре окружающего воздуха, и таким образом сила плавучести обращается в нуль). Подъем частицы происходит по сухой адиабате до уровня конденсации, а выше него – по влажной адиабате.

– *Доступная потенциальная энергия конвекции* (convective available potential energy, CAPE) для частицы, поднимающейся с уровня  $P_i$

$$CAPE_i = \int_{P_{LNB}}^{P_i} R_d (T_{\rho p} - T_{\rho a}) d \ln p, \quad (2.70)$$

где  $R_d$  – газовая постоянная сухого воздуха;  $T_{\rho}$  – «плотностная температура» (density temperature),  $T_{\rho} = T \frac{1+r/\varepsilon}{1+r_T}$ ;  $T$  – температура;  $r$  – отношение

смеси водяного пара;  $r_T = r + r_e + r_i$  – «полное» отношение смеси ( $r_e$  и  $r_i$  – отношения смеси для водяных капель и ледяных кристаллов);  $\varepsilon = R_d / R_v = 0,622$ ;  $R_v$  – газовая постоянная для водяного пара;  $P_i$  – давление на уровне  $i$ ;  $P_{LNB}$  – давление на уровне нулевой плавучести;  $T_{\rho p}$ ,  $T_{\rho a}$  – плотностные температуры на уровне  $p$  в поднимающейся частице и в окружающем (ambient) воздухе соответственно. Плотностная температура – это температура облачного воздуха, имеющего ту же плотность и давление, что и данный сухой воздух. (Применительно к влажному ненасыщенному воздуху  $T_{\rho}$  равна виртуальной температуре).

*Доступная потенциальная энергия* (Дж/кг) – это та часть полной потенциальной энергии, которая может выделиться и превратиться в кинетическую энергию в процессе разрешения неустойчивости. CAPE – величина, аналогичная принятому в России термину «энергия неустойчивости», но определяемая в данном случае не через обычную температуру, а через плотностную (как это делается в монографии Эмануэля (Emanuel, 1994). В некоторых ра-

ботах употребляется выражение для CAPE и через обычную температуру, а оценка через плотностную (виртуальную) температуру называется не CAPE, а CAPV. В практике используются обе оценки.

– *Энергия конвективного торможения* (convective inhibition, CIN) для частицы, поднимающейся с уровня  $P_i$ :

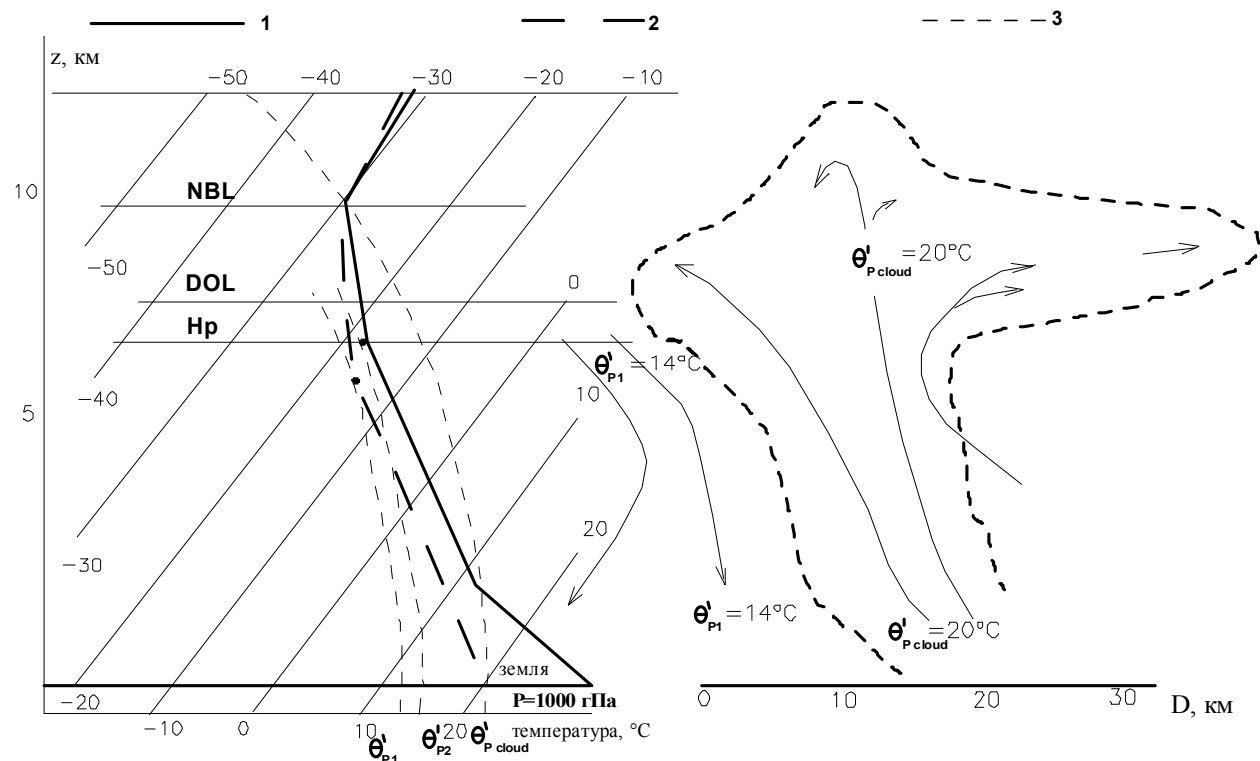
$$\text{CIN} = \int_{P_{\text{LFC}}}^{P_i} R_d (T_{\rho P} - T_{\rho a}) d \ln p. \quad (2.71)$$

Здесь  $P_{\text{LFC}}$  – давление на уровне свободной конвекции (LFC – Level of free convection), т. е. на уровне, до которого надо адиабатически поднять частицу от земли (сначала по сухой адиабате, а затем, выше уровня конденсации, по влажной адиабате), чтобы ее кривая подъема пересекла кривую стратификации: начиная с уровня свободной конвекции, частица приобретает положительную плавучесть.

Аналогично CAPE, CIN в ряде случаев рассчитывается не по виртуальной, а по обычной температуре. Эта величина является мерой торможения частицы, которая поднимается (например, вследствие динамического вынуждения, в зонах поперечных циркуляций на фронтах) в устойчивом слое: какую энергию надо затратить, чтобы поднять частицу до уровня, с которого она уже сможет подниматься под действием силы плавучести. Эта энергия затрачивается на работу против отрицательной силы плавучести.

– *Высота уровня зарождения нисходящего потока в облаке*. Эта величина была введена сотрудниками Высокогорного геофизического института (Нальчик), разрабатывавшими методы прогноза грозových и градовых процессов. Она характеризует способность кучево-дождевого облака генерировать сильные нисходящие потоки (рис. 2.24).

Уровень зарождения нисходящего потока (мы его называли, по аналогии с другими величинами, по-английски downdraft origination level, DOL) – это верхняя граница слоя, в котором частицы с отрицательной плавучестью могут опускаться до земли с положительным ускорением. Уровень DOL определяется как верхний уровень пересечения влажной адиабаты, касательной к кривой стратификации температуры (так, что вся кривая стратификации лежит справа от этой влажной адиабаты) с кривой стратификации температуры смоченного термометра. Поскольку температура смоченного термометра консервативна относительно испаряющегося дождя, то при высыхании капель, выпадающих из облака, воздух на уровне DOL при своем опускании нигде не окажется теплее окружения. При определенной высоте уровня DOL и выполнении еще ряда критериев, в облаке возникают условия для образования града. Деталей этого метода мы рассматривать не будем. Подобных методов прогноза конвекции существует много, они получены эмпирически на материалах наблюдений в конкретном районе и привязаны к



**Рис. 2.24.** Схема определения высоты уровня зарождения нисходящего потока в кучево-дождевом облаке: 1, 2 – кривая стратификации температуры воздуха и температуры смоченного термометра, соответственно; 3 – влажные адиабаты, LNB – высота уровня нулевой плавучести;  $H_p$  – верхняя граница потенциально-неустойчивого слоя; DOL – высота уровня зарождения нисходящего потока; DOL– $H_p$  – слой, из которого возможно адиабатическое опускание, если в нем высыхают капли дождя (Федченко и др., 1991).



определенной схеме прогноза синоптического положения и полей температуры, влажности и ветра (от синоптических оценок до численных моделей) и потому являются ограниченными как в географическом, так и в других отношениях. Они, однако, находят практическое применение в тех районах, для которых разработаны.

Наиболее радикальный путь прогнозирования интенсивной конвекции – прямое описание ее в рамках численных моделей. Это направление интенсивно развивается в ведущих мировых прогностических центрах с развитием негидростатических моделей атмосферы с высоким пространственным разрешением. Современные численные модели в принципе могут в явном виде моделировать МКС, с которыми связаны наиболее опасные конвективные явления. Однако одно только высокое разрешение, даже вместе с отказом от приближения гидростатики и хорошей физикой, не обеспечивает успешного прогноза конвективных явлений: для этого нужны исходные данные с соответственным пространственным разрешением.

Это в нашей стране является слабым местом любого численного моделирования. Кроме того, поскольку модели с таким разрешением и физическим наполнением являются, как правило, региональными, а не глобальными, для их успешной работы нужны данные наблюдений с высоким временным разрешением, чтобы обеспечить граничные условия нужной точности. Это условие не выполняется пока не только у нас, но даже и в Западной Европе, где пространственная плотность наблюдающих станций на порядок и более превышает российскую. Поэтому в настоящее время нет оснований надеяться на успехи прямого численного моделирования конвекции даже с помощью устанавливаемых сейчас региональных численных моделей мирового класса. В этих условиях перечисленные выше характеристики конвективной неустойчивости сохраняют свое практическое значение.

В отделе авиационной метеорологии Гидрометцентра России еще в 1991 г. разработана программа расчета высоты уровня конвекции (LNB) по данным объективного анализа и численного прогноза в узлах регулярной сетки (в данном случае вид сетки не имеет значения). В то время существовала сеть метеорологических радиолокаторов (пусть не самых лучших), и составлялись по срокам радиозондирования сборные карты радиолокационных данных на европейской части СССР, в том числе высоты верхней границы облаков. Эти карты были доступны в архиве Гидрометцентра России, и мы с Е.Н. Скриптуновой вручную составили архив данных о высотах облаков по квадратам сетки объективного анализа, а затем выбрали вариант метода частицы, обеспечивавший наилучшее согласие расчетов с радиолокационными наблюдениями. Эта программа до настоящего времени оперативно используется для построения карт особых явлений для авиации. Расчеты производятся по всему северному полушарию с шагом  $1,25^\circ$ .

Выбранным вариантом метода частицы оказался метод Лебедевой, с введением перемешанного слоя, толщина которого была получена автором метода по материалам наблюдений над средней полосой ЕТС. На самом деле

зависимость от времени в пределах конвективного сезона не очень сильная. В сроки 00 и 12 ч ВСВ оперативно рассчитываются поля LNB диагностические (по объективному анализу) и прогностические на 24 и 36 ч на основе выходных данных оперативной численной модели. В базу заносятся только значения LNB, соответствующие мощности облака над уровнем конденсации (принимаемым за нижнюю границу облака) более 2 км. Мелкая конвекция (облака малой вертикальной мощности) пренебрегается как не имеющая значения для авиации. Величины CAPE, CIN, DOL мы также рассчитывали, имеются соответствующие программы. Но используем мы только LNB, потому что специальным исследованием показано (в дипломной работе студента МГУ), что LNB лучше коррелирует с осадками, чем CAPE. Другие величины мы пока не используем.

Конвективную неустойчивость можно рассматривать как еще один, помимо фронтального, механизм вынуждения вертикальных движений. Действительно, если имеется конвективно-неустойчивый слой, то частица, каким-либо образом сдвинутая из положения равновесия, будет двигаться в том же направлении с ускорением. В случае восходящих движений возникнут облака, а затем и осадки. Мы в своем анализе ввели в рассмотрение **коэффициент реализации конвективной неустойчивости**, показывающий, как часто в квадратах сетки с конвективной неустойчивостью выпадают осадки. Этот коэффициент оказался больше во фронтальных зонах, чем вне их, и полученную разницу можно рассматривать как оценку стимулирующего эффекта фронтальных зон как триггеров конвекции. Другая введенная нами характеристика – **коэффициент генерации конвективной неустойчивости** – определяется как отношение числа узлов с конвективной неустойчивостью к общему числу узлов сетки в какой-либо области. Так, во фронтальных зонах коэффициент генерации больше, чем вне их, что можно рассматривать как оценку интенсивности генерации конвективной неустойчивости во фронтальных зонах. По данным объективного анализа за шесть лет по европейской России мы получили, например, что в весенний сезон 45,5 % всех узлов с устойчивой стратификацией относятся к однородным воздушным массам, и здесь же обнаружены 26,4 % узлов с неустойчивой стратификацией. Таким образом, динамическое (фронтальное) вынуждение выступает как генератор конвективной неустойчивости. При этом неустойчивость в глубоких слоях (более 8 км) чаще бывает вынужденной, чем неустойчивость в более мелких слоях. На очень резких фронтах конвективная неустойчивость обнаруживается в среднем в каждом третьем узле сетки зимой и в каждом втором – в остальные сезоны.

Если же говорить о коэффициенте реализации конвективной неустойчивости, то (без детализации по градациям осадков) этот коэффициент составляет 31,1 % во внутримассовых условиях и 64,3 % на интенсивных фронтах (см. раздел 4). То есть чем сильнее динамическое (фронтальное) вынуждение вертикальных движений, тем лучше реализуется конвективная неустойчивость.

Таким образом, конвективное вынуждение вертикальных движений и осадков играет роль, сравнимую с динамическим вынуждением во фронтальных зонах. При этом конвективная неустойчивость, будучи более мелкомасштабным явлением по сравнению с бароклинными зонами фронтов, испытывает их влияние как генератора и триггера конвективной неустойчивости. Каждый из видов вынуждения является сам по себе значимым предиктором осадков, в особенности сильных: фронтальный параметр является значимым предиктором во все сезоны (в особенности зимой), а высота уровня нулевой плавучести – во все сезоны, кроме зимы (когда повторяемость неустойчивой стратификации невысока).

### 3. НЕОДНОРОДНАЯ АДВЕКЦИЯ. АТМОСФЕРНЫЕ ФРОНТЫ, ФРОНТОГЕНЕЗ И ФРОНТОЛИЗ

#### Определения. Термически прямые и термически обратные циркуляции

Как мы видели из рассмотрения геострофического и квазигеострофического приближений, ветер в свободной атмосфере дует по изобарам (так, что низкое давление остается слева) или по изогипсам, а поле температуры через соотношение термического ветра

$$f \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{g}{T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

влияет на вертикальный профиль ветра. На каждом уровне ветер может быть направлен не по изотермам, а под каким-либо углом к ним.

С другой стороны, мы познакомились с понятием бароклинности, определяемой горизонтальным градиентом температуры. В целом в тропосфере на севере холоднее, чем на юге, но величина этого направленного с юга на север градиента меняется со временем (в метеорологии направление градиента обратно гидродинамическому: не в сторону увеличения скаляра, а в сторону его уменьшения, как мы это уже видели на примере геопотенциала).

В тропосфере существуют **зоны повышенной бароклинности**, они возникают, смещаются и размываются. Это так называемые **фронтальные зоны**. У земли горизонтальные градиенты температуры в этих зонах бывают особенно большими, тогда говорят об **атмосферных фронтах**.

**Процесс образования или усиления фронтальных зон**, определяемый как процесс увеличения горизонтальных градиентов температуры в индивидуальной частице, **называется (индивидуальным) фронтогенезом**. Процесс уменьшения градиентов температуры называется фронтолизом. (Существует также понятие локального фронтогенеза как процесс увеличения горизонтальных градиентов температуры в конкретной точке.)

Пусть  $S$  – скалярная величина (температура  $T$  или потенциальная температура  $\theta$ ), зависящая от  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и от  $t$ . Считая движение трехмерным, рассмотрим изменение во времени величины

$$\nabla S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} = S_n, \quad (3.1)$$

где индексы обозначают дифференцирование;  $n$  – нормаль к изолинии  $S = \text{const}$ .

Тогда трехмерный индивидуальный фронтогенез будет

$$F_3 \equiv \frac{d}{dt} |\nabla S| = \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \quad (3.2)$$

Преобразуем (3.2) к виду

$$F_3 = \frac{S_x}{S_n} (S_{xt} + uS_{xx} + vS_{xy} + wS_{xz}) + \frac{S_y}{S_n} (S_{yt} + uS_{yx} + vS_{yy} + wS_{yz}) + \\ + \frac{S_z}{S_n} (S_{zt} + uS_{zx} + vS_{zy} + wS_{zz}), \quad (3.3)$$

или

$$F_3 = \frac{S_x}{S_n} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{dS}{dt} - u_x S_x - v_x S_y - w_x S_z \right) + \frac{S_y}{S_n} \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{dS}{dt} - \right. \\ \left. - u_y S_x - v_y S_y - w_y S_z \right) + \frac{S_z}{S_n} \left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{dS}{dt} - u_z S_x - v_z S_y - w_z S_z \right). \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) показывает, что фронтогенез определяется неравномерностью изменения во времени характеристики  $S$  индивидуальной частицы (члены с  $dS/dt$ ), а также горизонтальным переносом поля  $S$  неоднородным полем ветра (члены  $u_j S_x$ ,  $v_j S_y$ ;  $j = x, y, z$ ) и неравномерным вертикальным переносом при наличии вертикальной стратификации  $S$  (члены  $w_j S_z$ ). Например, если  $S$  – потенциальная температура, то первые слагаемые в каждой из скобок описывают эффект неадиабатических притоков тепла. Если эти последние распределены неравномерно и градиент их имеет составляющую в направлении градиента  $S$  (поскольку перед скобками стоят  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ ), то такой неравномерный нагрев будет приводить к росту градиента температуры, т. е. к фронтогенезу.

Иначе говоря, фронтогенез имеет место, если нагревание наблюдается в более теплом воздухе и/или охлаждение – в более холодном. Вторые и третьи слагаемые в скобках (3.4) описывают эффект сближения изолиний  $S$  в результате переноса горизонтальным полем ветра. Их называют адвективными или конфлюэнтными (confluent) членами. Наконец, четвертые слагаемые в скобках дают фронтогенетический эффект, если, например, в области теплого воздуха имеется более сильная адвекция тепла по вертикали, чем в области более холодного воздуха. Эти «конвективные члены» (tilting terms) описывают изгиб или наклон изоповерхности  $S$  в результате неравномерных вертикальных движений.

Рассмотрим некоторые частные случаи индивидуального фронтогенеза. При плоском движении

$$\nabla_2 S = \{S_x, S_y\}$$

$$u_z = v_z = w = w_z = 0$$

(3.2) принимает вид:

$$F_2 = \frac{S_x}{S_n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{dS}{dt} - u_x S_x - v_x S_y \right] + \frac{S_y}{S_n} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \frac{dS}{dt} - u_y S_x - v_y S_y \right]. \quad (3.5)$$

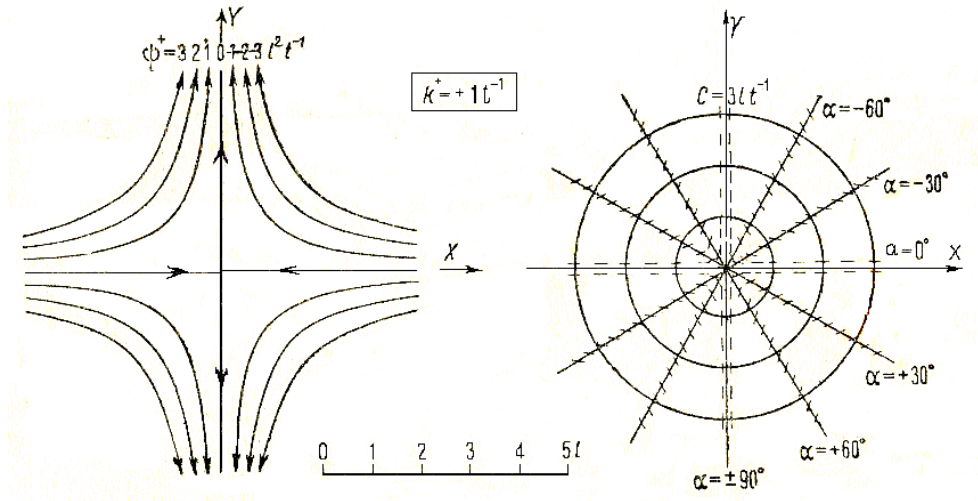
Если  $S$  – потенциальная температура, то в адиабатическом процессе  $dS/dt = 0$ :

$$F_2 = \frac{S_x}{S_n} [-u_x S_x - v_x S_y] + \frac{S_y}{S_n} [-u_y S_x - v_y S_y] = -S_x u_n - S_y v_n. \quad (3.6)$$

Здесь  $u_n, v_n$  – производные по нормали к изотерме. В векторной форме:

$$F_2 = -\nabla_2 S \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial n}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что при линейных зависимостях  $S$  и  $u$  от координат величина  $F_2$  будет постоянной во всей плоскости, вследствие чего фронтальная зона как зона максимального сгущения изотерм не может возникнуть. Необходимое условие ее появления – нелинейность одной из зависимостей.



**Рис. 3.1.** Линии тока в линейном деформационном поле  $u = -ax, v = ay$  (слева); изотехи (окружности) и линии равных направлений (прямые, проходящие через центр) (справа).

Существует специальное распределение скоростей в горизонтальной плоскости, на котором удобно изучать фронтогенез и фронтолиз – так называемое линейное деформационное поле

$$\begin{aligned} u &= -ax, \quad v = ay, \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial n} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

которое в атмосфере соответствует случаю соседства двух циклонов и двух антициклонов с седловиной между ними. В таком поле имеется ось сжатия (ось  $y$ ) и ось растяжения (ось  $x$ ) в том смысле, что при изотермах, параллельных оси  $y$ , происходит их сближение (сжатие интервалов между ними), т. е. фронтогенез. При изотермах, параллельных оси  $x$ , будет происходить удаление изотерм друг от друга, т. е. фронтолиз (рис. 3.1).

Модуль скорости ветра в деформационном поле:

$$\begin{aligned} |\vec{V}| &= a\sqrt{x^2 + y^2} = aR, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{y}{x}, \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус-вектор частицы;  $\alpha$  – угол между вектором скорости и осью  $x$ . Изотахи будут представлять собой окружности, показанные на рисунке справа, а изолинии равных направлений – прямые, проходящие через начало координат.

Линейное деформационное поле используется, как мы увидим позже, в задачах моделирования фронтогенеза.

Формула (3.6) может использоваться для расчетов плоского фронтогенеза, обычно на поверхности 850 гПа как верхней границе пограничного слоя, где влияние трения уже мало. Точность этих расчетов зависит от точности объективного анализа или прогноза полей ветра и температуры и от шага сетки, поскольку производные так или иначе аппроксимируются: либо просто конечными разностями, либо через производные от сплайн-функций (обычно кубических), которыми аппроксимируются горизонтальные распределения ветра. В реальной атмосфере области интенсивного фронтогенеза могут быть узкими и недолгоживущими, тогда они не улавливаются расчетами  $F_2$  по грубой сетке. В случаях, если такие зоны достаточно обширны, расчеты могут быть успешными.

Очевидно, что в линейном деформационном поле и в других полях, где хотя бы одна из зависимостей  $\nabla S, \partial \vec{V} / \partial n$  от координат нелинейна, возникают вертикальные движения, в соответствии с уравнением неразрывности. Эти движения оказывают большое влияние на характер погоды, часто над

обширными территориями. Поэтому изучение закономерностей распределения вертикальных движений во фронтальных зонах составляет одну из основных задач их динамики.

Само по себе открытие атмосферных фронтов метеорологами Бергенской школы было результатом изучения линий конвергенции в поле горизонтального ветра и связанного с ними вытеснения воздуха вверх из пограничного слоя.

В 50-е годы XX в. в рамках квазигеострофической теории была открыта важная закономерность, связывающая направление вертикальных циркуляций с характеристиками поля ветра в окрестности фронтальной зоны. Эта закономерность известна как **теорема Сойера-Элиассена** (*Sawyer, 1952, 1956; Eliassen, 1959, 1962*). Постановка задачи в этих работах следующая.

Пусть имеется зона значительных градиентов температуры, таких, что искривленностью этой зоны можно пренебречь и считать ее параллельной оси  $y$ , а ось  $x$  направить в сторону теплого воздуха.

Ветер с составляющими  $U, V$  считается геострофическим, параметр Кориолиса – постоянным ( $f$ -плоскость). Затем допускается существование отклонения ветра от геострофического (наличие агеострофических составляющих):  $u = U + u', v = V + v'$ , и считается  $dv/dt$  малым, а  $dV/dt = -fu'$ . Иными словами, сохраняем негеострофическую адвекцию поля  $V$ , но адвекцией  $v'$  пренебрегаем.

Далее выполняются преобразования, которые здесь опускаем (они воспроизводятся в книге (*Шакина, 1985*)) и рассматриваем фронтальную зону в плоскости  $x, p$  внутри замкнутой области (с боковыми границами на  $y = \pm\infty$ , вертикальными – на земле и на верхней границе атмосферы). Опуская сложные преобразования, получаем следующую формулировку теоремы:

**Поперечные по отношению к фронтальной зоне вертикальные циркуляции в квазигеострофическом приближении являются компенсационными по отношению к фронтогенетическому или фронтолитическому эффекту горизонтального ветра.**

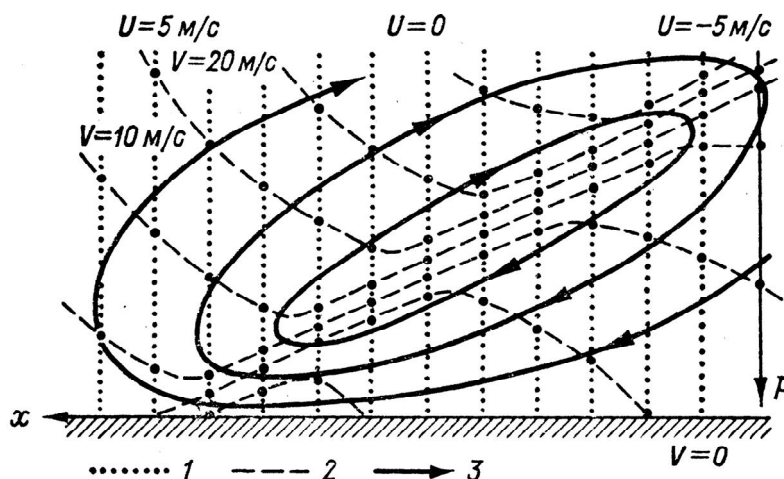
Эта закономерность в реальной атмосфере выполняется для фронтальной зоны в целом (а не для ее отдельных фрагментов). Она скорее носит характер преобладающей тенденции и тем лучше выражена, чем ближе к геострофическим движения на масштабах фронтальной зоны.

Что означает эта формулировка?

Если горизонтальное поле ветра фронтогенетично, то вертикальная циркуляция должна быть такой, чтобы этот эффект ослабить, т. е. она должна быть фронтолитична. В устойчиво стратифицированной атмосфере, где потенциальная температура растет с высотой, фронтолитический эффект вертикальных движений будет в том случае, если на стороне холодного воздуха будут нисходящие движения, а на стороне теплого – восходящие. Такая ситуация показана на рис. 3.2. С учетом негеострофических составляющих ско-



рости ветра картина меняется таким образом, что опускание воздуха происходит в более узкой зоне и не только на холодной стороне, но главным образом внутри самой фронтальной зоны больших градиентов температуры.



**Рис. 3.2.** Поперечная циркуляция в идеализированной фронтальной зоне при  $\partial U/\partial x < 0$ ,  $\partial U/\partial p = 0$  (Eliassen, 1962): 1 и 2 – изолинии  $V = \text{const}$  и  $U = \text{const}$  соответственно, 3 – линии тока поперечной циркуляции.

Атмосферный фронт, на котором имеется восхождение теплого воздуха и опускание холодного (или хотя бы подъем теплого воздуха относительно холодного), называется **анафронтом**.

Согласно теореме Сойера-Элиассена, при горизонтальном фронтогенезе будет развиваться анафронт.

Еще одно определение: циркуляция, при которой теплый воздух поднимается относительно холодного, называется **термически прямой**.

При горизонтальном фронтогенезе поперечная вертикальная циркуляция является термически прямой.

При горизонтальном фронтолизе, напротив, развивается поперечная к фронтальной зоне (к изотермам) термически обратная циркуляция: теплый воздух опускается относительно холодного. В зоне фронтолиза (размывания температурных контрастов) атмосферный фронт будет **катафронтом**.

Поперечные циркуляции такого типа называются **компенсационными**, потому что они стремятся компенсировать фронтогенетический или фронтолитический эффект горизонтального ветра, нарушающий баланс термического ветра.

Впоследствии Б. Хоскинс с учениками (Hoskins et al, 1978) получил аналог этой теоремы, но выведенный для свободной атмосферы (вне границ) и с

меньшими ограничениями, хотя по-прежнему в квазигеострофическом приближении и на  $f$ -плоскости. В цитированной работе получено уравнение, непосредственно связывающее вертикальные скорости  $w$  с фронтогенетическим или фронтолитическим полем ветра:

$$N^2 \nabla^2 w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2 \nabla \bar{Q}, \quad (3.9)$$

$$\bar{Q} = \{Q_1, Q_2\} = \left( -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \nabla \theta, -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \nabla \theta \right), \quad (3.10)$$

$$\bar{Q} = \frac{dG}{dt} \frac{g}{\theta_0} \nabla \theta.$$

Из последнего уравнения видно, что вектор  $\bar{Q}$  – векторная фронтогенетическая функция – связан со скалярной фронтогенетической функцией (3.2): связь эта выражается следующим образом:

$$F_{2G} \equiv \frac{dG}{dt} |\nabla \theta| = \frac{\theta_0}{g |\nabla \theta|} \nabla \theta \cdot \bar{Q}. \quad (3.11)$$

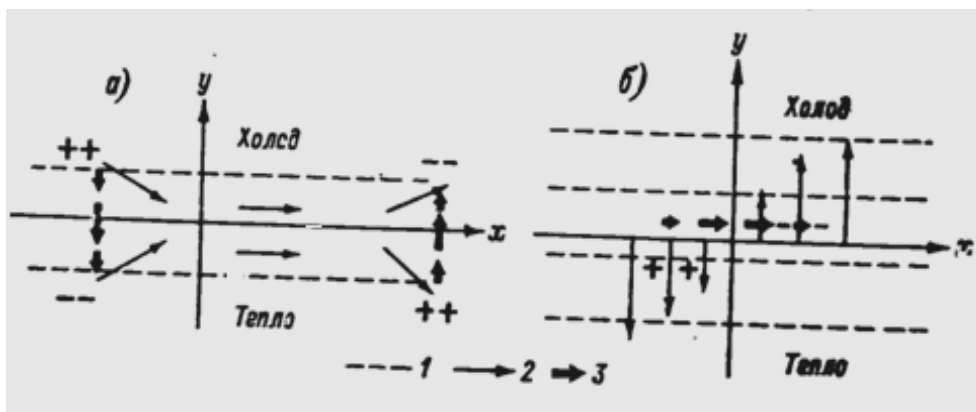
Таким образом, в квазигеострофическом приближении распределение вертикальных движений зависит от дивергенции или конвергенции фронтогенетической вектор-функции, т. е. от распределения фронтогенетических эффектов по горизонтали. При достаточно больших масштабах движений в свободной атмосфере уравнение (3.9) можно использовать для качественных оценок и для расчетов.

При таких оценках в качестве первого приближения принимается, что при положительном вынуждающем члене (3.9), стоящем в правой части, имеет место опускание воздуха, а при отрицательном – восхождение.

В частности, рассмотрим ситуацию с входом и дельтой фронтальной зоны (рис. 3.3): при дивергенции  $\bar{Q}$  должны наблюдаться нисходящие движения на холодной стороне, а в области конвергенции – подъем (на теплой стороне) в области входа. Иначе говоря, циркуляция будет термически прямой. В области дельты циркуляция термически обратная.

В качественном отношении для оценок более удобна теорема Сойера-Элиассена, с которой выводы о дивергенции  $\bar{Q}$  полностью согласуются. Для расчетов же больше подходит векторная фронтогенетическая функция, которая обычно и рассчитывается в диагностических исследованиях.

Таким образом, процесс фронтогенеза есть процесс увеличения горизонтальных контрастов температуры в ограниченной зоне (называемой фронтальной зоной). Если такой процесс достаточно интенсивен, то его результат виден на картах погоды как атмосферный фронт – узкая переходная зона между холодной и теплой воздушными массами.



**Рис. 3.3.** Распределение вектора  $Q$  во входе и дельте струйного течения (а) и при поперечном сдвиге ветра (б): 1 – изотермы, 2 – векторы скорости, 3 – векторы  $Q$  со знаками  $\nabla Q$  (Шакина, 1985).

### Модель фронта как поверхности раздела воздушных масс. Формула Маргулеса

Метеорологи бергенской школы, располагавшие наблюдениями только у земли, все же представляли себе фронты как трехмерные образования. Они рассматривали их как зоны бароклинности, благоприятствующие вертикальным движениям и превращению потенциальной энергии в кинетическую.

В это время (20-е годы XX века) появилась идеализированная модель фронта в пространстве как поверхности раздела двух воздушных масс; пересечение этой поверхности с поверхностью земли представляет собой в этой модели атмосферный фронт.

Если представить себе две покоящиеся воздушные массы, разделенные такой поверхностью на невращающейся Земле, то, очевидно, холодный воздух будет подтекать под теплый, а теплый подниматься вверх. На эти движения будет затрачена доступная потенциальная энергия горизонтальных контрастов, и движение прекратится, а поверхность раздела станет горизонтальной.

Если же имеется ветер как в теплой, так и в холодной воздушных массах, и действует сила Кориолиса, то полного «опрокидывания» не происходит, и поверхность раздела останется наклонной. От чего зависит угол ее наклона?

Рассмотрим плоскую поверхность раздела (рис. 3.4) как поверхность разрыва температуры, упирающуюся в горизонтальную поверхность. Плоскость  $xz$  перпендикулярна фронту (и поверхности раздела). Если  $p$  и  $p'$  – давле-

ние по обеим сторонам фронтальной зоны и  $\delta p$ ,  $\delta p'$  – приращения  $p$  и  $p'$  вдоль фронтальной поверхности в плоскости  $x, z$ , то

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z, \quad \delta p' = \frac{\partial p'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p'}{\partial z} \delta z. \quad (3.12)$$

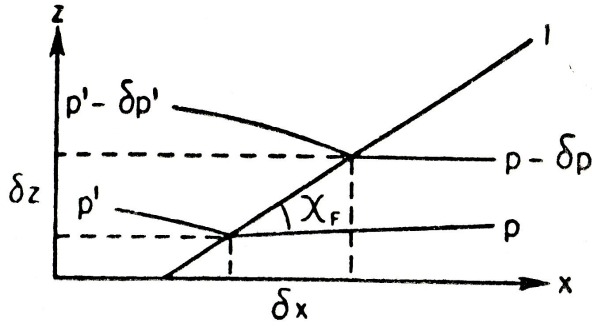


Рис. 3.4. Наклон фронтальной поверхности:  
l – фронтальная поверхность.

Поскольку разрыв на фронтальной поверхности терпит температура, а давление непрерывно, то на поверхности раздела:

$$p = p', \quad \delta p = \delta p'. \quad (3.13)$$

Пусть  $\alpha$  – угол наклона фронтальной поверхности:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta z}{\delta x}. \quad (3.14)$$

Из (3.12) при  $\delta p = \delta p'$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \delta x &= \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) \delta z, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta z}{\delta x} &= \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}}{\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя в 3.15 из уравнения статики

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (3.16)$$

получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}}{g(\rho - \rho')}. \quad (3.17)$$

Таким образом, тангенс угла наклона фронта обратно пропорционален контрасту плотностей. Если выразить теперь  $\partial p / \partial x$ ,  $\partial p' / \partial x$  через составляющие геострофического ветра, параллельные фронту, то получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{g} \frac{\rho v_g - \rho' v'_g}{\rho - \rho'}. \quad (3.18)$$

Это выражение было впервые получено Маргулесом (1906 г.). Имеется его упрощенный вариант: поскольку разрыв плотностей намного меньше разрыва геострофического ветра, то можно заменить  $\rho$  и  $\rho'$  средней  $\rho_m$ , причем  $P_m = \rho_m R T_m$ , тогда, полагая приближенно  $T T' = T_m^2$ , получим достаточную для оценок формулу

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{f T_m}{g} \frac{v_g - v'_g}{T' - T}. \quad (3.19)$$

В средних широтах при  $f \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , наклон фронта  $\operatorname{tg} \alpha$  будет порядка 1/150, хотя может колебаться в широких пределах.

В реальной атмосфере далеко не всегда можно считать «фронтальную поверхность» плоскостью, даже если «поверхность» как-то усмотреть можно. Наклон фронта на вертикальных разрезах меняется с высотой, будучи более крутым в нижнем слое. Формула Маргулеса дает некую среднюю оценку. Фронт предполагается стационарным.

В дальнейшем Н.Е. Кочин (1931) рассмотрел задачу об ускорении фронта, представленного так же, как в модели Маргулеса, но движущегося и имеющего изгиб (в сторону холодного либо теплого воздуха). Он получил аналитическое решение, которое можно найти в книге (*Гандин и др., 1955*). В настоящее время это выражение, имеющее целью определение направления ускорения фронта по величинам «скачков» температуры и ветра и наклона фронта, не имеет особого значения.

## Модели возникновения узких зон фронтов

Рассмотрим более поздние модели возникновения узких зон фронтов во фронтогенетических полях. Эти модели появились в век развитой аэрологии, когда уже было известно, что пространственная структура фронтальных зон далека от модели Маргулеса. Прежде всего, «скачки», т. е. очень резкие контрасты свойств в очень узкой зоне, наблюдаются, да и то довольно редко, только вблизи земной поверхности. Не только в свободной атмосфере, но и в пограничном слое фронт — это не поверхность, а переходная зона конечной толщины. Кроме того, форма зоны наибольших контрастов на вертикальном разрезе далеко не линейная.

Имеется аналитическая модель возникновения фронта в линейном деформационном поле, развитая Стоуном (*Stone, 1966*).

Движение считается квазигеострофическим, невязким и гидростатическим в слое конечной толщины  $H$  с жесткими верхней и нижней границами, с устойчивой вертикальной стратификацией температуры и с некоторым начальным горизонтальным градиентом температуры. Принимается также приближение Буссинеска (отклонение плотности пропорционально отклонению температуры). Поле ветра имеет вид линейного деформационного поля.

Решение нестационарной задачи ищется в виде ряда по степеням  $Ri^{-1/2}$ , где  $Ri$  – число Ричардсона, которое в этой задаче записывается в виде

$$Ri = \frac{a_0 f^2}{b_0^2 g}, \quad (3.20)$$

где  $a_0, b_0$  – постоянные вертикальный и горизонтальный градиенты температуры,  $a_0 = (\gamma_a - \gamma)\theta^{-1}$ ,  $b_0 = T' \frac{\partial T}{\partial y}$  и, таким образом, пропорционален вертикальному сдвигу ветра, согласно соотношению термического ветра. Обычная запись для числа Ричардсона

$$Ri = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^{-2}. \quad (3.21)$$

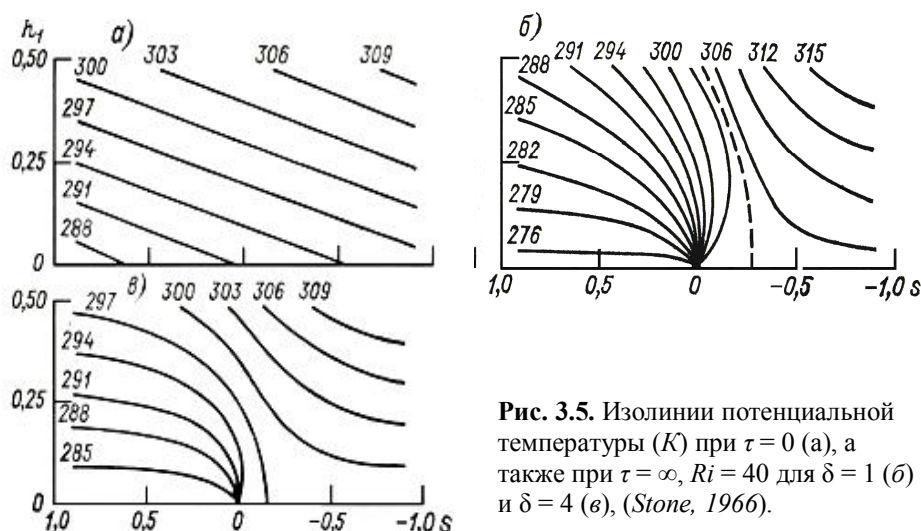
Задача решается довольно сложным путем (см. *Шакина, 1985*). В разложениях учитываются только члены первого порядка, и решение находится отдельно для приграничных областей и отдельно для внутренней части слоя, затем эти решения склеиваются. Для нас важно, что такое движение само по себе способно формировать зоны больших градиентов температуры (рис. 3.5).

Важнейшим результатом является то, что эти зоны оказываются особенно резкими вблизи нижней и верхней границ (в пределе по  $t \rightarrow \infty$  возникает скачок температуры). В системе развивается поперечная к фронту вертикальная циркуляция, с восхождением на стороне теплого воздуха (в соответствии с теоремой Сойера-Элиассена). Она ослабляет фронтогенетический эффект горизонтального ветра. Но на границах ставится условие непротекания ( $w = 0$ ), и из-за отсутствия вертикальных движений горизонтальный фронтогенез здесь ничем не компенсируется, поэтому и получается очень резкий фронт. То же самое получается и под тропопаузой (которая представлена жесткой стенкой).

На рисунке  $\delta$  характеризует размер деформационного поля:

$$\delta = \frac{a_0 g H^2}{f^2 x_0^2},$$

При прочих равных условиях, чем больше  $x_0$ , тем меньше  $\delta$ . Из рисунка видно, что при  $\delta = 1$  контрасты у земли в пределе при  $\tau$ , равном бесконечности, получаются более резкими, чем при  $\delta = 4$ .

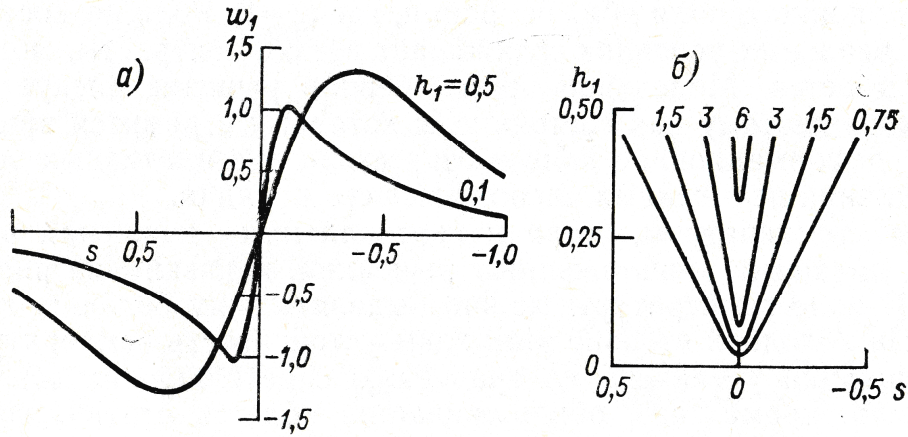


**Рис. 3.5.** Изолинии потенциальной температуры ( $K$ ) при  $\tau = 0$  (а), а также при  $\tau = \infty$ ,  $Ri = 40$  для  $\delta = 1$  (б) и  $\delta = 4$  (в). (Stone, 1966).

Намного более реалистичной является модель фронтогенеза в линейном деформационном поле, учитывающая основные негеострофические эффекты и включающая подвижную тропопаузу вместо жесткой верхней стенки. Такая модель развита Хоскинсом и Брезерттоном (*Hoskins, Bretherton, 1972*) .

Уже из анализа, получающегося в этих предположениях уравнения относительно геопотенциала  $\Phi$  делается строгий вывод, что если  $\nu$  и  $\theta$  ограни-

чены, то разрывы их могут быть только на границах либо там, где имеются разрывы потенциального вихря, его первой и второй производных. Этот важный результат показывает, в соответствии с наблюдениями, что очень резкие фронтальные разделы могут возникать лишь у земли. Теоретически они могут возникать и вблизи тропопаузы, если потенциальный вихрь или его производные имеют там скачок.



**Рис. 3.6.** Распределение вертикальной скорости на двух уровнях при  $\tau = \infty$ ,  $\delta = 1$  (а) и изолинии параллельной фронту составляющей ветра в вертикальной плоскости  $s, h_1$  при  $\tau = 4$ ,  $\delta = 1$  (б) (Stone, 1966).

В данной постановке задача решается в лагранжевом приближении, т. е. описывается движение индивидуальной частицы. Чтобы выделить отдельную частицу, движение необходимо характеризовать с помощью трех инвариантов. Это потенциальный вихрь, потенциальная температура и третья величина  $M = v' + f\bar{z}$ , которую Хоскинс и Брезертон называли «функцией тока» абсолютного вихря в плоскости  $x, \bar{z}$ , где  $\bar{z}$  – вертикальная координата, используемая в модели и зависящая от давления

$$\bar{z} = \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \frac{\kappa H_s}{\kappa - 1}, \quad (3.22)$$

где  $H_s$  – высота однородной атмосферы

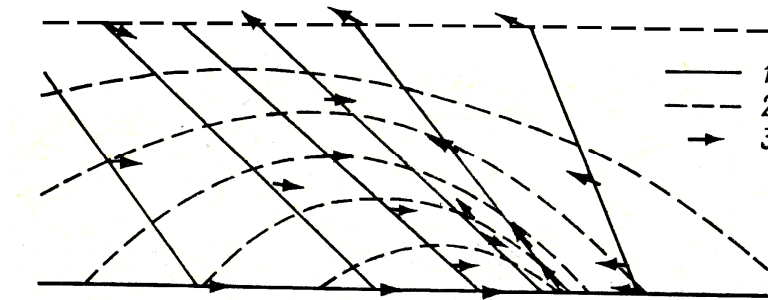
$$H_s = \frac{p_0}{\rho_0 g}.$$

Один вариант задачи, описывающий формирование фронта у земной поверхности, решается в однослойной модели (тропосфера с жесткой стенкой),



другой – в двухслойной модели с подвижной тропопаузой и описывает формирование фронтальной зоны в свободной атмосфере и деформацию тропопаузы.

На рис. 3.7 показаны изолинии  $X = x + v' / f$ . Величина  $X$  называется геострофической координатой, поскольку для частицы, движущейся со скоростью, задаваемой геострофическим деформационным полем,  $X = x$ . Поверхность одинаковых  $X$  в каждый момент есть материальная поверхность, поэтому координата  $X$  названа полулагранжевой. Без доказательства отметим, что на поверхности постоянного  $X$  будет постоянной также и потенциальная температура. На рисунке видно, что через конечное время после начала движения возникает зона увеличенных градиентов температуры у земли, за ней в нижнем слое имеется максимум скорости  $v$  (параллельной фронту). В теплом воздухе вертикальные движения восходящие, в холодном – нисходящие.



**Рис. 3.7.** Вертикальный разрез через зону фронта в горизонтальном деформационном поле при нулевом потенциальном вихре и жесткой верхней границе (Hoskins, Bretherton, 1972): 1 – изолинии  $X$ ; 2 – изолинии  $v$ ; 3 – векторы скорости в плоскости  $x, z$ .

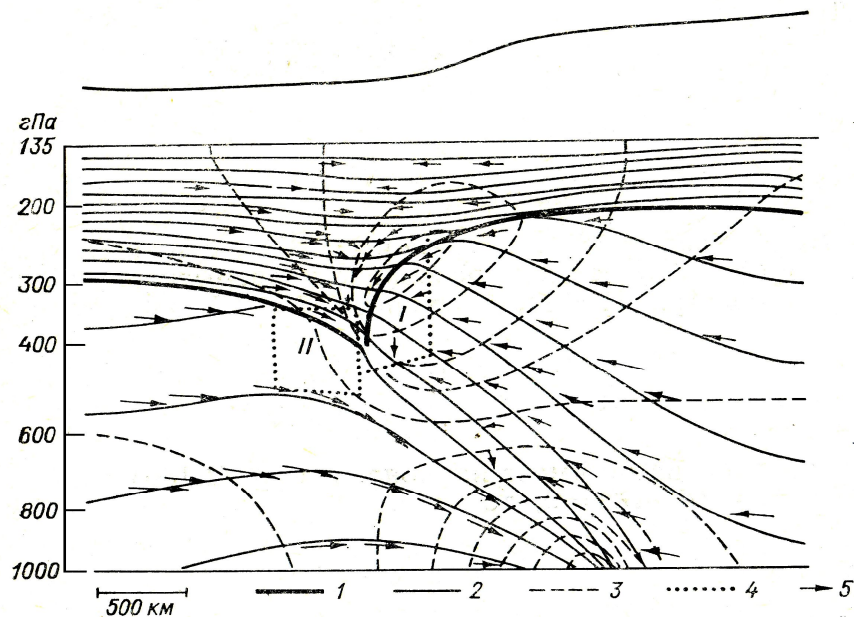
В этом же первом варианте задачи получено, что резкий фронт у земли с разрывами температуры и скорости ветра, при конечной мере деформации  $a$  ( $u = -ax$ ,  $v = ay$ ), может формироваться в течение конечного времени (а не при  $t \rightarrow \infty$ ). Вертикальные движения образуют термически прямую циркуляцию. Агеострофическая составляющая ветра  $v'$  в зоне фронта растет до бесконечности, и таким образом агеострофическая циркуляция приобретает решающее значение вскоре после начала формирования фронта.

Сопоставление структуры такого модельного фронта с реальными данными измерений Сандерса (Sanders, 1955), выполненное Блюменом (Blumen, 1980), показало, что в основных чертах распределение температуры, ветра, вертикальных движений, завихренности правильно воспроизводится моделью. Вместе с тем, как и следовало ожидать, многие детали полей не

улавливаются. Большая часть этих деталей относится к мезоструктуре. Помимо этого имеются более существенные расхождения: реальный фронт остается практически стационарным в течение периода анализа, тогда как модельный фронт обостряется до появления разрывов свойств. Это расхождение устраняется включением в рассмотрение турбулентного перемешивания в пограничном слое.

Во втором варианте задачи рассмотрена двухслойная модель, по-прежнему в приближении геострофического баланса поперек фронта. В нижнем слое (тропосфера) и верхнем (стратосфера) стратификация температуры различна. На тропопаузе (подвижной границе между слоями) выполняется склейка решений. На верхней границе (около 28 км) температура однородна, а на нижней границе в начальный момент имеется горизонтальный градиент температуры.

Эту задачу авторам не удалось решить аналитически, и они дают ее численное решение. Получены фронтальные зоны в толще тропосферы со струйными течениями вблизи тропопаузы. Удалось получить различные стадии опускания «языка» стратосферного воздуха на тропосферные уровни. Тенденция к формированию бесконечной завихренности вблизи тропопаузы (в отличие от задачи о приземном фронте и жесткой тропопаузе) не обнаруживается (рис. 3.8).



**Рис. 3.8.** Вертикальный разрез фронтальной зоны, полученный в двухслойной модели (Hoskins, 1971): 1 – тропопауза, 2 – изолинии  $\theta$ , 3 – изотакхи, 4 – границы областей I и II по обеим сторонам фронтальной зоны, 5 – векторы скорости в плоскости  $x, z$ .

Из анализа постановки задачи авторы делают следующие выводы об условиях формирования фронтальных разрывов и о причинах опускания тропопauses.

Мы видели, что при фронтогенезе у нижней границы завихренность в течение конечного времени возрастает до бесконечности. Такой же процесс происходит и у верхней жесткой границы в однослойной модели. Этот процесс сопровождается падением давления или понижением высот изобарических поверхностей, что означает формирование барической ложбины вблизи фронта. Однако если аналогичный рост положительной завихренности происходит вблизи подвижной границы, то понижение давления в зоне фронта приводит к «втягиванию» тропопauses в этой зоне, т. е. на циклонической стороне струйного течения.

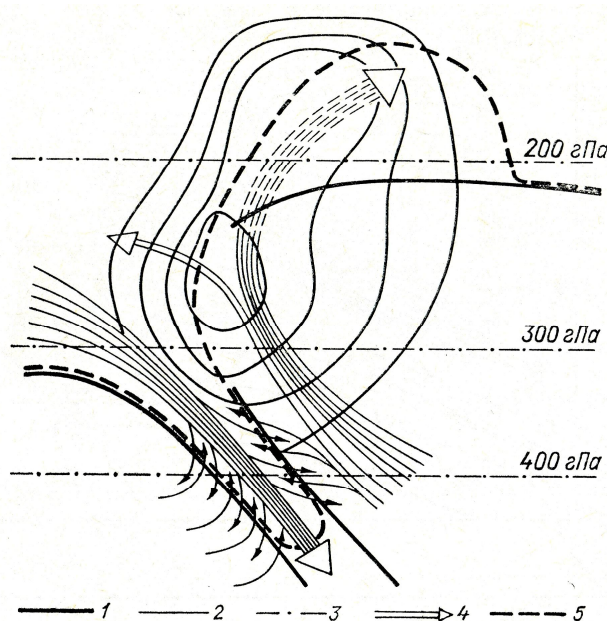
Струйное течение формируется на теплой стороне верхнетропосферного фронта. В нем возникает собственная поперечная (спиральная) циркуляция, направленная против часовой стрелки (если смотреть по потоку): на циклонической стороне СТ расположена нисходящая ветвь этой циркуляции. Ее эффект состоит в уменьшении бесконечно больших значений завихренности и градиентов температуры. Эта циркуляция является компенсационной в смысле теоремы Сойера-Элиассена.

В реальных струйных течениях действительно имеются спиральные циркуляции, которые были открыты в 60-е годы XX века при специальных полетах в зонах струйных течений, которые тогда стали доступными в результате развития авиации. В публикациях тех лет интересны дискуссии о направлении спиральных циркуляций: по часовой стрелке или против? Находились подтверждения и тому, и другому, причем приводились фактические измерения. Со временем стало ясно, что циркуляция с опусканием на циклонической стороне (против часовой стрелки) наблюдается на фронтогенетических участках струйных течений, а циркуляция с восхождением на циклонической (холодной) стороне – на фронтолитических участках.

Остановимся теперь на роли сжимаемости и вязкости в задачах о фронтогенезе. Обобщение решения Хоскинса и Брезертонна на случай небуссинеской (т. е. сжимаемой) атмосферы дал Хоскинс в том же 1972 г. Действительно, при столь больших вертикальных масштабах упрощения Буссинеска плохо выполняются. Отказ от них позволяет получить более интенсивное проникновение стратосферного воздуха в тропосферу, а нисходящие движения внутри этого опускающегося объема выражены значительно лучше.

Этот результат согласуется с наблюдениями. Опускание стратосферного воздуха во фронтальных зонах было обнаружено (путем расчета потенциального вихря Эртеля и применения изэнтропического анализа по учащенным измерениям – радиозондированию и самолетным данным) еще Ридом и Даниэльсеном (*Reed, Danielsen, 1959*), затем более детальными самолетными измерениями М. Шапиро, и в дальнейшем неоднократно подтверждались. На рисунке дана схема движений во фронтогенетическом участке высотной

фронтальной зоны, обобщенная Шапиро с соавторами (*Shapiro et al, 1980*) по детальным самолетным измерениям (рис. 3.9).



**Рис. 3.9.** Схема вертикальных движений в слое высотной фронтальной зоны и струйного течения (*Shapiro et al, 1980*):  
 1 – тропопауза и границы фронтальной зоны; 2 – изотакхи продольной составляющей ветра в струйном течении; 3 – изобары; 4 – направление поперечных циркуляций; 5 – изолиния  $PV$ , отделяющая стратосферный воздух от тропосферного (динамическая тропопауза).

В заключение остановимся на влиянии турбулентного перемешивания. Как уже говорилось, получаемые в теоретических моделях разрывы свойств являются следствием неучета механизмов турбулентности, которые действуют неоднородно в слоях с различной температурно-ветровой стратификацией. Теоретически задача о фронтогенезе в линейном деформационном поле с учетом турбулентного обмена впервые решена Уильямсом (*Williams, 1972*), который добавил к деформационному полю внизу слой Экмана с постоянным коэффициентом турбулентности. Позже в ЦАО Б.Я. Куценко (*Куценко, 1981*) решил (тоже численно) задачу с переменным коэффициентом турбулентности, зависящим от вертикального сдвига ветра и градиента температуры.

В модели Уильямса квазистационарные фронты формируются в течение 1–2 дней, причем ширина фронтальной зоны у земли зависит от интенсивности турбулентного перемешивания и в вертикальном, и в горизонтальном направлениях. В модели Куценко появляется много деталей, в частности мак-

симум ветра в пределах пограничного слоя (типа струйных течений нижних уровней).

Делаем основной вывод, что «скачки» свойств на фронтах, предположенные в первой половине XX века как критерий фронта, реально могут наблюдаться изредка на холодных фронтах с очень сильным фронтогенезом и только непосредственно у земли. В толще пограничного слоя и свободной атмосферы наблюдаются фронтальные зоны конечной ширины, в них имеют место поперечные циркуляции компенсационного типа. Именно они обуславливают втягивание тропопаузы во фронтальной зоне и на ее холодной стороне и стратосферные вторжения в тропосферу. Именно наличие твердой стенки (земной поверхности), препятствующей вертикальным движениям, обуславливает формирование резких контрастов свойств, смягчаемых в приземном слое турбулентным перемешиванием.

## 4. АНАЛИЗ РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ С ПОЗИЦИЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

### Спектральный анализ.

#### Спектры энергии атмосферных движений

Энергетическим спектром называется распределение энергии данного процесса (считаемого случайным и стационарным) по волновым числам или по частотам. В первом случае энергетический спектр является пространственным, во втором – временным.

Общее выражение для временного энергетического спектра имеет вид:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(-i2\pi\omega\tau) d\tau, \quad (4.1)$$

где  $R$  – автокорреляционная функция;  $\tau$  – переменный сдвиг по времени между двумя наблюдениями. Аналогичное выражение имеет место для пространственного спектра по волновым числам.

Функция  $S(\omega)$  есть спектральная плотность энергии на частоте  $\omega$ . На элементарном интервале частот величина  $\omega S(\omega)$  равна кинетической энергии, приходящейся в данном процессе на этот интервал.

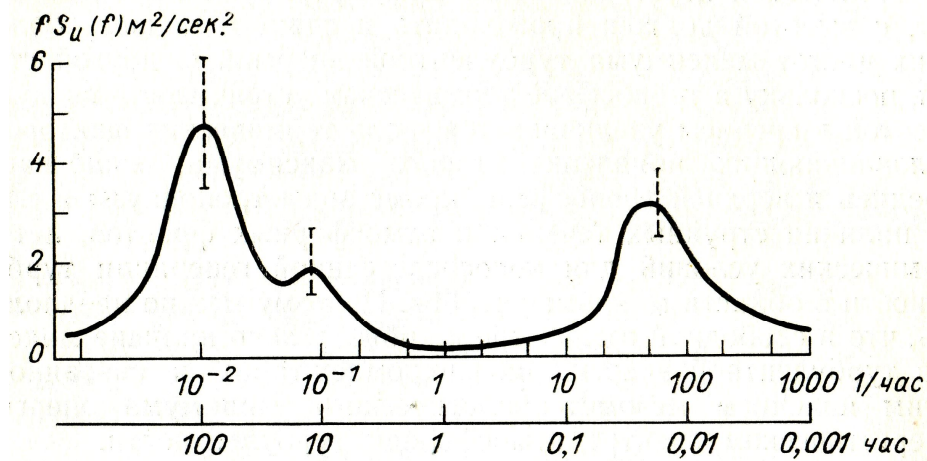
Энергетические спектры, рассчитанные по реальным данным (по пространственным или временным рядам наблюдений с определенной дискретностью) показывают, как распределена кинетическая энергия на данном диапазоне масштабов. Вид энергетического спектра зависит от того, какие силы определяют энергообмен.

Если ряд наблюдений с дискретностью  $\Delta x$  содержит  $N$  членов, то энергетический спектр можно определить на интервале волновых чисел от  $2\pi/(N\Delta x)$  до  $2\pi/(2\Delta x)$ . Иначе говоря, наибольшая длина волны, энергия которой оценивается, равна длине всего промежутка, на котором имеются данные. Длина наиболее короткой волны равна удвоенной дискретности данных и называется длиной волны Найквиста (для временного спектра – частотой Найквиста).

Более строгое и детальное изложение вопросов расчета и точности спектральных оценок имеется в книге (Винниченко и др., 1968) и в двухтомнике (Дженкинс, Ваттс, 1971).

Обычно из-за больших диапазонов изменения как аргумента (частота, волновое число), так и функции (спектральной плотности энергии), одну или обе эти величины наносят на графики в логарифмическом масштабе.

Вначале остановимся на общем характере спектра кинетической энергии атмосферных движений в нижнем слое (фактически – приземного ветра), представленного Ван дер Ховеном (*Van der Hoven, 1951*): этот спектр построен для интервала периодов от 10 месяцев до 2 с (рис. 4.1).



**Рис. 4.1.** Энергетический спектр пульсаций горизонтальной компоненты скорости ветра, по (*Van der Hoven, 1951*).

Максимум в так называемой синоптической области ( $T = 100$  ч) обусловлен прохождением барических систем синоптического масштаба, а максимум в области микромасштабов ( $f = 6 \cdot 10^1 \text{ ч}^{-1}$ ,  $T = 1/60 \text{ ч} = 1 \text{ мин}$ ) – мелкомасштабной турбулентностью динамического и конвективного происхождения. Важнейшей особенностью является глубокий минимум в мезомасштабной области (характерный период  $T = 1$  ч).

Спектры в билогарифмической шкале обычно строятся для отдельных частей широкого интервала частот, представленного в спектре Ван дер Ховена. Эта шкала имеет физический смысл: в таких координатах выделяются линейные участки спектра, соответствующие каскадному процессу энергообмена. Так, спектр энергии однородной и изотропной (колмогоровской) турбулентности в инерционном интервале, т. е. в том интервале волновых чисел, где нет источников и стоков энергии, а есть только дробление вихрей в результате перемешивания, имеет вид (закон Колмогорова-Обухова):

$$S(\Omega) \approx \Omega^{-5/3}, \quad (4.2)$$

то есть в билогарифмической шкале:

$$\lg S \approx -\frac{5}{3} \lg \Omega \quad (4.3)$$

– это прямая, имеющая наклон  $-5/3$ . Такой интервал действительно обнаруживается в мелкомасштабной турбулентности, где никакие силы, кроме силы инерции, не действуют на частицу. На интервалах более длинных волн, где сила плавучести уже (при устойчивой стратификации) тормозит вертикальное перемещение частиц, экспериментальные спектры пульсаций вертикальной компоненты скорости ветра можно аппроксимировать зависимостью:

$$S(\Omega) \approx \Omega^{-n} \quad (4.4)$$

(закон Ламли-Шура), где  $n$  колеблется в пределах от 2,2 до 3,1 в зависимости от стратификации. Это тоже прямая в билогарифмических координатах с более крутым наклоном, чем у спектра Колмогорова-Обухова.

Переходя к еще более длинным волнам, т. е. к движениям, для которых существенна сила Кориолиса, обнаруживаем спектры вида, показанного на рис. 4.2.

На рисунке вместо простого волнового числа в  $\text{м}^{-1}$  по горизонтали отложены зональные волновые числа. Здесь тоже обнаруживается инерционный интервал с наклоном спектра  $-3$ .

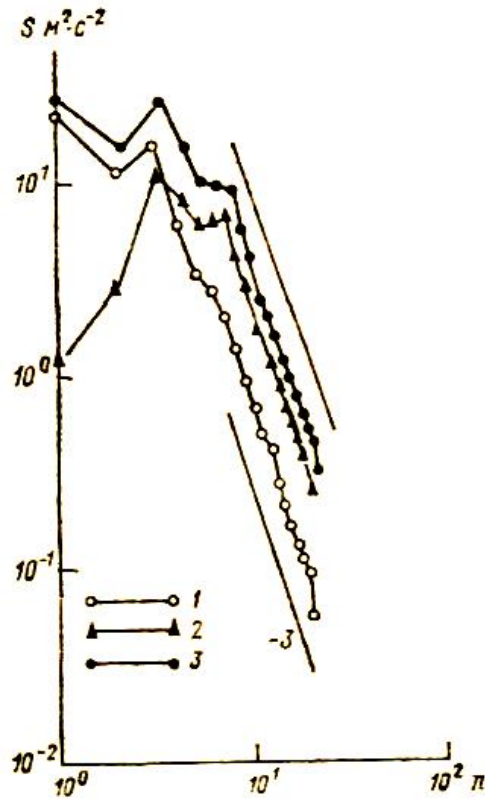
Линейные участки спектров – это участки с каскадной передачей энергии. Наклон  $-3$  теоретически получен А.С. Мониним и Р.В. Озмидовым (*Монин, Озмидов, 1981*) как наклон спектра двумерной турбулентности (горизонтального движения). В таком процессе невозможен перенос энергии от крупных масштабов к мелким, но возможен перенос **энстрофии**, равной  $(1/2)\zeta^2$ , где  $\zeta$  – относительный вихрь скорости. Энергия в таком процессе переносится от меньших масштабов к большим: это явление называется **отрицательной вязкостью**.

На экспериментально полученных спектрах энергии атмосферных движений интервал масштабов, на котором спектр имеет наклон «обратного куба», – это волновые числа от  $n \approx 8$  до  $n \approx 20$ , что соответствует вихрям синоптического масштаба (коротковолновый конец этого интервала – около длины волны 1000 км). Синоптические вихри не являются строго двумерными, но могут считаться квазидвумерными. Совокупный эффект этих вихрей можно представить как некое «макروتурбулентное трение». Поскольку движения синоптических масштабов близки к геострофическим, то турбулентность, элементами которой являются синоптические вихри, называется геострофической турбулентностью.

В среднем, основная доля энергии на этом участке спектра переносится в сторону больших масштабов: в среднем преобладает отрицательная вязкость, но не везде и не всегда.



Кроме неупорядоченного режима геострофической турбулентности, для атмосферы (в особенности для планетарных масштабов в свободной атмосфере) характерен упорядоченный режим планетарных волн.



**Рис. 4.2.** Спектры ( $S$ ) среднезональной кинетической энергии в зависимости от зонального волнового числа  $n$  в полосе  $30-60^\circ$  с.ш. на поверхности 500 гПа за зимний сезон 1975/76 гг. (Tsai, Kao, 1978):

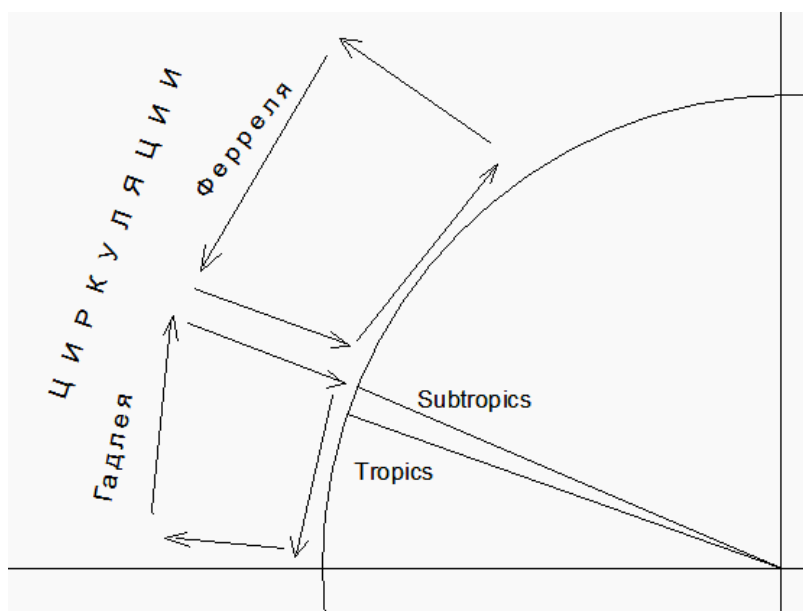
1 – спектр зональной составляющей скорости ветра,  
2 – меридиональной,  
3 – общий спектр,  
 $n = 1, 2, 3$  – планетарные волны,  
 $n = 4-7$  – длинные волны.

На энергетических спектрах волновые составляющие имеют вид пиков на определенных волновых числах (на рисунке – на зональных волновых числах 1–7). Энергия планетарных волн черпается из энергии зонального потока или непосредственно из неравномерного нагрева поверхности, обусловленного распределением моря и суши (в особенности зональное волновое число 2). Обмен энергией между планетарными волнами и синоптическими вихрями может идти в обоих направлениях, в зависимости от высоты и от конкретных условий процесса.

Зональное волновое число 0 соответствует однородному зональному потоку, который во внетропических широтах направлен с запада на восток. В осредненных по широте полях ветра обнаруживаются глобальные циркуляционные ячейки, к которым относятся ячейки (или циркуляции) Гадлея и Ферреля.

**Циркуляция Гадлея (Hadley)** была предложена для объяснения существования пассатов. Эта циркуляция включает движение от субтропических широт к экватору в нижнем слое, восходящие движения в зоне экватора, отток по направлению к субтропическим широтам в верхних слоях (в верхней тропосфере и нижней стратосфере) и опускание в субтропических широтах. Вследствие влияния силы Кориолиса ветры у земли в северном полушарии отклоняются вправо, так что пассат здесь имеет северо-восточное направление (в южном полушарии – юго-восточное). Верхняя ветвь имеет юго-западное направление. Ячейка не замкнута, и траектории частиц являются винтовыми (как и в симметричных возмущениях). Вблизи экватора имеется зона сходимости пассатов обоих полушарий – так называемая внутритропическая зона конвергенции, испытывающая сезонные смещения в зимнее полушарие. Это зона облачности и осадков, тогда как в субтропиках имеется тенденция к образованию антициклонов с сухой погодой.

Ячейку Гадлея можно себе представить как термически прямую циркуляцию с восхождением над областью максимального нагрева – над термическим экватором. В реальной атмосфере зоны пассатных ветров, внутритропическая зона конвергенции (ВТЗК) и субтропические антициклоны хорошо выражены в течение всего года, тогда как «антипассат» в верхних слоях выражен не всегда (так, в летнем полушарии он в низких широтах отсутствует) и обнаруживается нерегулярно, но в среднем перенос воздуха от экватора к более высоким широтам в верхней тропосфере и нижней стратосфере преобладает (рис. 4.3).



**Рис. 4.3.** Схема циркуляций Гадлея и Ферреля.

**Циркуляция Ферреля (Ferrell)** включает опускание в субтропиках (там же, где и в ячейке Гадлея), поток к северу в средних (субполярных) широтах в нижних слоях, восхождение в субполярных широтах и противотечение с севера на юг в верхних слоях. Это термически обратная циркуляция с опусканием относительно более теплого воздуха и подъемом холодного. Ячейка Ферреля также не замкнута, траектории частиц винтовые вследствие отклоняющего эффекта силы Кориолиса (ветер в северном полушарии направлен с юго-запада вниз и с северо-востока наверху). Считается, что такая циркуляция представляет собой осредненный результат совокупного действия циклонов и антициклонов средних широт. В частности внизу тепло переносится к северу и вверх потоками теплой несущей полосы в циклонах (см. ниже). В реальных данных ячейка Ферреля обнаруживается только при осреднении ветра за многолетний период по широтным кругам.

### **Изэнтропический анализ**

Привычным для нас и общепринятым является изобарический анализ трехмерной структуры атмосферных полей (когда эта структура характеризуется набором карт движений и температуры на изобарических поверхностях). Достоинством изобарического анализа является то, что давление всюду непрерывно и всегда падает с высотой, а также ветер в свободной атмосфере дует по изобарам, и что основные погодные системы обнаруживаются именно в поле давления. Недостатками этого анализа является то, что трехмерные траектории частиц не лежат на изобарических поверхностях и, значит, по картам барической топографии невозможно оценить вертикальных перемещений воздушных частиц.

Альтернативой изобарическому анализу является изэнтропический анализ. В этом случае в качестве вертикальной координаты используется потенциальная температура. В среднем стратификация устойчива, и потенциальная температура монотонно растет с высотой. Трехмерная структура представляется с помощью набора карт изэнтропических поверхностей. Достоинство этого метода в том, что потенциальная температура является инвариантом адиабатических процессов и, значит, изэнтропические поверхности являются материальными поверхностями, т. е. в адиабатическом процессе состоят из одних и тех же материальных частиц. Частица, двигаясь по такой поверхности, никуда с нее не уходит и, значит, траектории движения частиц на ней являются трехмерными: видны вертикальные движения частиц. Если имеет место конденсация (при подъеме), то сохраняется эквивалентно-потенциальная температура.

В дополнение к координате  $\theta$ , при изэнтропическом анализе рассчитывается потенциальный вихрь Эртеля  $PV$ , который, как мы видели, является инвариантом системы примитивных уравнений. Поверхности постоянного

$PV$  также являются материальными в адиабатическом приближении, а если мы проведем изолинии  $PV$  на изэнтропической поверхности, то такие линии будут материальными линиями, т. е. будут состоять из одних и тех же частиц. Такой анализ предпочтителен для исследования трехмерной структуры движений. Так, проводя траектории частиц на изэнтропических поверхностях, мы можем следить за перемещением индивидуальных частиц. На концах траекторий (например, 12-часовых) должны совпадать значения потенциального вихря. Разность давлений в начальной и конечной точках траекторий показывает изменение давления в индивидуальной частице, а это и есть вертикальное смещение частицы.

Такой способ расчета вертикальных скоростей является наиболее надежным. В сравнении с другими способами (в особенности в верхней тропосфере), он к тому же очень нагляден. Кроме допущения адиабатичности, других допущений не делается.

Изэнтропический анализ был предложен в 1930-е годы Дж. Нэмайесом (J. Namias), затем на какое-то время был забыт, – когда быстро развивался изобарический анализ. С конца 50-х годов он снова стал широко использоваться с развитием мезомасштабных исследований в работах Danielsen, Reiter, Bleck, Petersen, Browning, Ludlam, Hobbs, Carlson и др. С помощью изэнтропического анализа были получены важные результаты.

## Понятие динамической тропопаузы

С изэнтропическим анализом и с концепцией потенциального вихря Эртеля связано понятие о динамической тропопаузе, имеющее большое прикладное значение.

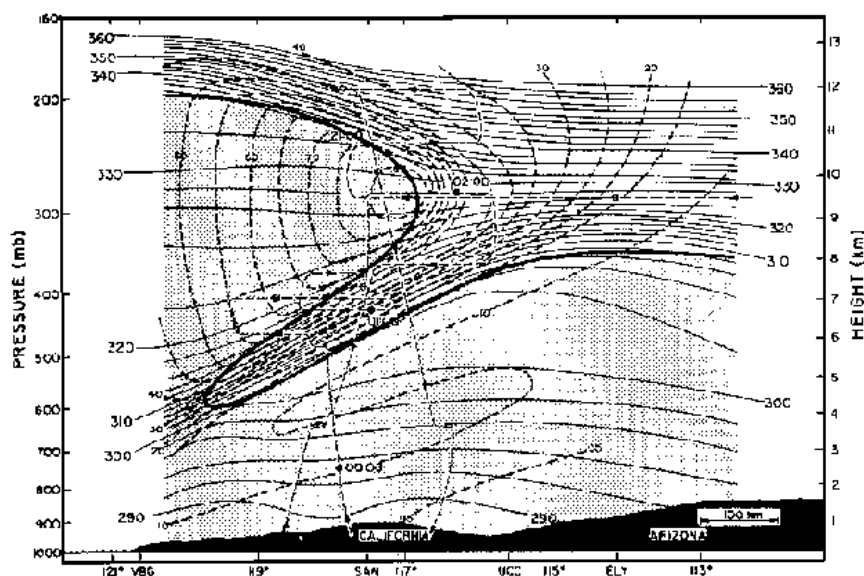
Как известно, согласно определению ВМО (1957 г.), скорректированному в 1986 г., тропопаузой считается уровень, на котором вертикальный градиент температуры становится равным  $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}/100\text{ м}$ , при условии, что он остается равным или меньшим этого значения в вышележащем слое толщиной 2 км. Определяемая таким образом тропопауза называется термической.

Физический смысл тропопаузы состоит в том, что она является границей между тропосферой и стратосферой. Эти две сферы различаются не только термической стратификацией. Они различаются также химическим составом (озон, радиоактивные примеси), так что стратосферный воздух отличается по своему составу от тропосферного.

Первые же работы по изэнтропическому анализу показали, что значения  $PV$  в тропосфере и в стратосфере отличаются на порядок величины. Так, в тропосфере  $PV$  имеет порядок  $0,3\text{--}0,6\text{ рву}$ , где  $\text{рву}$  – принятая международная единица измерения потенциального вихря Эртеля:

$$\text{рву} = 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ К кг}^{-1} \text{ с}^{-1}. \quad (4.5)$$

В стратосфере  $PV$  имеет порядок 10  $rvu$  и растет с высотой до нескольких десятков  $rvu$ . В переходном слое от тропосферы к стратосфере, т. е. в слое тропопаузы,  $PV$  меняется от тропосферных до стратосферных значений. Пользуясь этим, можно отличить тропосферный воздух от стратосферного и выделять «субстратосферный» воздух переходного слоя. Был проведен ряд исследований соответствия между термической тропопаузой и тропопаузой, определяемой по потенциальному вихрю Эртеля и названной динамической тропопаузой. В числе первых была наша работа (Борисова, Шакина, 1989), основанная на данных ПГЭП по северному полушарию. Потом появилась работа (Hoinka, 1998). В обеих работах было найдено, что термическая тропопауза соответствует ближе всего изоповерхности 4  $rvu$ . В нашей работе указывалось, что имеется сезонный ход – от 3,5  $rvu$  в холодный период года до 4,5  $rvu$  в теплый период. В среднем за год тоже получалось 4  $rvu$ . Субстратосферный воздух считается в интервале от 1  $rvu$  до тропопаузы. С тех пор концепция динамической тропопаузы широко используется в исследовательских работах. Динамическая тропопауза отличается большей точностью определения в сравнении с термической. Кроме того, она бывает единственной, а если и обнаруживаются глубокие вторжения, когда язык опустившегося субстратосферного воздуха подтекает под тропопаузу, то практически в этих вторжениях воздух никогда не содержит значений  $PV > 4$   $rvu$ ; во всяком случае, это хорошо видно на вертикальных разрезах (рис. 4.4).



**Рис. 4.4.** Вертикальный разрез тропосферы и нижней стратосферы 13 марта 1978 г. с глубоким стратосферным вторжением. Изолинии  $\theta$  (тонкие сплошные линии), изотахи (м/с) (жирные пунктирные линии), траектория самолета-лаборатории (тонкая пунктирная линия), динамическая тропопауза (жирная сплошная линия) (Shapiro, 1980; Holton et al, 1995).

Мы в своей практике прогнозов особых явлений на верхних уровнях для авиации уже более 10 лет используем концепцию динамической тропопаузы. Высота и температура тропопаузы, рассчитываемая в нашей Лаборатории зональных прогнозов, – это характеристики динамической тропопаузы, определяемой как поверхность  $4 \text{ рвч}$ . Синоптики говорят, что наша карта тропопаузы лучше тех, какие поступают из мировых центров и рассчитываются на основе определения термической тропопаузы.

Топография тропопаузы тесно связана с вертикальными циркуляциями во фронтальных зонах и в циклонах. В зонах глубоких восходящих движений образуются купола тропопаузы, в зонах опускания (они бывают более локализованы) – воронки или складки тропопаузы. Чтобы лучше понять связи топографии тропопаузы со структурой циклонов, рассмотрим основные особенности этой структуры на нелинейной фазе развития циклонов, но не в теоретических или численных моделях, а обнаруженные путем анализа реальных данных.

### **Мезомасштабная структура циклонов**

Основные результаты в этом направлении были получены в 1960–1970-х гг. по материалам учащенного зондирования с помощью изэнтропического анализа относительных скоростей. Особенность этого вида изэнтропического анализа состоит в том, что данные зондирования за последовательные сроки представляются в системе движений относительно изучаемого барического центра (в предположении, что последний смещается между сроками с постоянной скоростью). Для определения относительного ветра производится векторное вычитание скорости движения циклона из скорости ветра на станциях. По относительным ветрам строится система линий тока, которые в принятом предположении о стационарности движения являются также траекториями относительно центра циклона. Серию работ в этом направлении опубликовал К. Браунинг с сотрудниками по радиозондовым и радарным данным над Великобританией (*Browning, 1974; Browning, Harrold, 1969; Browning et al, 1973*), которая тогда уже была перекрыта густой сетью радиозондирования и сетью радаров. В дальнейшем эти результаты были подтверждены и дополнены другими исследователями, в основном на материалах наблюдений над Северной Америкой.

Рассмотрим основные выводы этих работ.

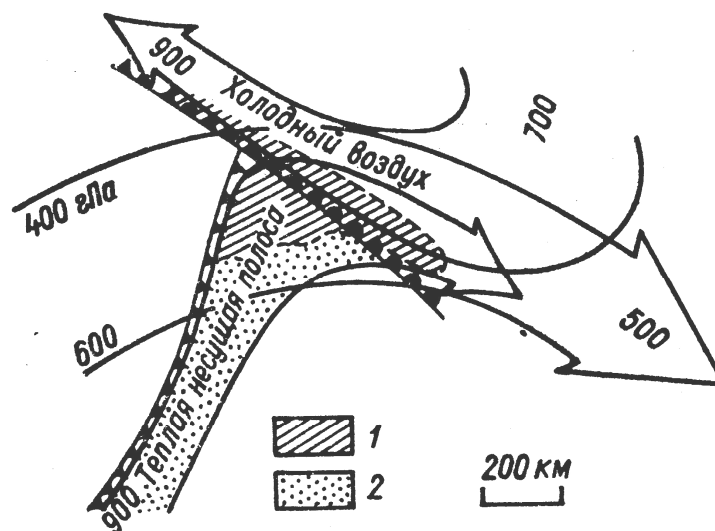
В молодых циклонах и в циклонах на стадии максимального развития (вплоть до начала окклюдирования) изэнтропический анализ относительных скоростей позволяет выделить три основных альфа-мезомасштабных потока, несущих воздух различного происхождения.

В нижнем слое в систему циклона втягивается теплый и влажный воздух. Если циклон движется с запада на восток, то теплый воздух проникает в его

систему с юга и течет внутри теплого сектора перед холодным фронтом по направлению к центру циклона. Не доходя до центра, он начинает восходить над теплым фронтом и поворачивает вправо, при этом содержащаяся в нем влага конденсируется. Тем самым обеспечивается основной приток водяного пара, необходимого для формирования облаков и осадков. О наличии зон наиболее интенсивной адвекции тепла перед холодными фронтами синоптики знали из опыта уже в конце 30-х годов. В 50-е годы И.П. Ветлов и Н.В. Петренко (*Ветлов, Петренко, 1955*) описывали «теплую ось», вдоль которой происходит адвекция тепла и влаги, и отмечали сильную зависимость между влажностью воздуха, переносимого по теплой оси, и интенсивностью фронтальных осадков. Браунинг и Харролд выделили этот поток (рис. 4.5), описали его форму в циклоне и назвали его «warm conveyor belt» (теплая лента конвейера). По-русски мы в свое время (70-е гг.) перевели этот термин как «теплая несущая полоса». Она втекает в циклон широким потоком параллельно холодному фронту и в условиях Великобритании имеет ширину около 300 км и вертикальную мощность около 2 км в том месте, где начинает восходить над теплым фронтом. Нередко подъем начинается уже внутри теплого сектора в соответствии с общим восхождением воздуха в циклоне. Воздух теплой несущей полосы достигает состояния насыщения и формирует обширную облачную систему теплого фронта, ее передняя часть (облака Ci, Cs) располагаются в средней и верхней тропосфере. В наиболее типичном случае, когда холодный фронт является анафроном, в потоке теплой несущей полосы наблюдаются восходящие движения и перед холодным фронтом как ветвь термически прямой циркуляции. Скорость такого упорядоченного подъема достигает нескольких десятков см/с. Непосредственно перед холодным фронтом в потоке теплой несущей полосы обычно выделяется струйное течение нижних уровней в слабонеустойчивом пограничном слое. Струи такого типа с максимальными скоростями 25–30 м/с наблюдаются как днем, так и ночью.

В циклонах, смещающихся над территорией России, потоки типа теплой несущей полосы также обнаружены во всех изучавшихся случаях. Так, мы с А.А. Ляховым по данным учащенного зондирования над Украиной перед меридиональным медленно движущимся холодным фронтом обнаружили теплую несущую полосу над большой территорией, она имела вид замкнутого рукава в поле псевдопотенциальной температуры шириной около 300 км и вертикальной протяженностью до 3 км и простиралась от Черного до Белого моря на расстояние более 2 тыс. км.

Есть все основания утверждать, что теплая несущая полоса является общей характерной особенностью мезомасштабной структуры циклонов и важнейшим источником тепла и влаги. Неоднократно отмечалось, что если вследствие каких-то причин поток теплой несущей полосы оказывается отрезанным и не может осуществлять адвекцию тепла и влаги, то осадки на фронтах прекращаются и облачность размывается. Такие условия создаются в окклюдированных циклонах, а также при переваливании последних через горные препятствия значительной ширины.

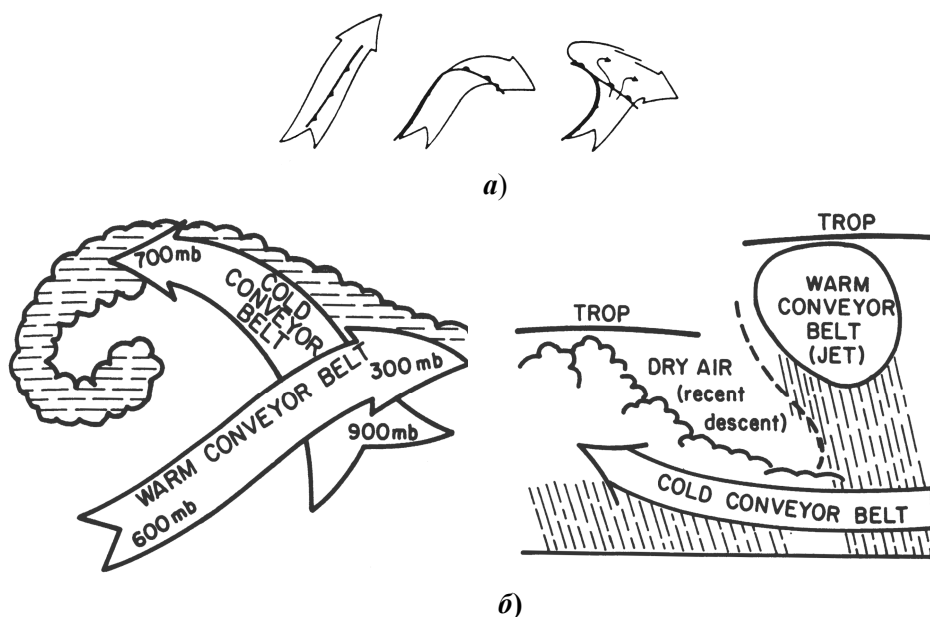


**Рис. 4.5.** Схема основных  $\alpha$ -мезомасштабных потоков в циклоне (движение относительно центра циклона), (Browning, Harrold, 1969):  
1 – облачная система теплого фронта, 2 – теплая несущая полоса.

Теплая несущая полоса, по данным Браунинга, доходит до 500 гПа. По более поздним данным, как на рис. 4.6, взятом из монографии (Carlson, 1991), уже указывается как верхняя граница ее подъема – поверхность 300 гПа. В настоящее время вполне доказано, что потоки типа теплой несущей полосы поднимаются до тропопаузы и внедряются на стратосферные высоты, тем самым являясь одним из постоянно действующих факторов стратосферно-тропосферного обмена.

Другой мезомасштабный поток, формирующий облачную систему циклона – это так называемая «cold conveyor belt», холодная несущая полоса. Она содержит менее влажный и более холодный воздух, втекающий в циклон с востока перед теплым фронтом из системы антициклона (или гребня), располагающегося восточнее изучаемого циклона. Проходя под влажным облачным воздухом теплой несущей полосы, он обогащается влагой вследствие испарения выпадающих из этого вышележащего воздуха осадков. Он поворачивает к северо-западу и западу и участвует в общем восхождении. Формируется облачность, которая составляет северную и западную части облачного вихря, характерного для циклона. Верхняя граница этой облачности лежит обычно существенно ниже облачной системы теплого фронта. Обе системы облаков формируют «облачную запятую», видную на спутниковых снимках.

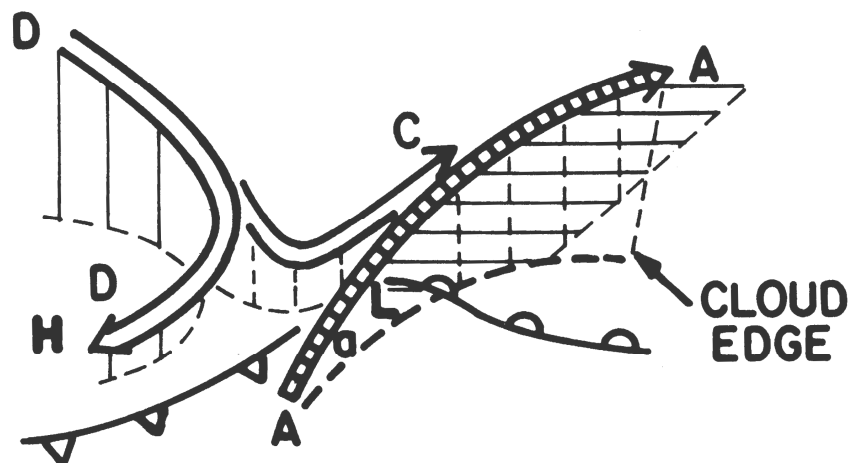




**Рис. 4.6.** Конфигурация теплой несущей полосы при эволюции облачной системы от полосы до «запятой» (слева направо) (а); схематическая модель «зрелой» теплой несущей полосы в момент окклюдирования: вид сверху (слева) и вертикальный разрез (справа) по (Browning, 1989; Carlson, 1991) (б).

Третий мезомасштабный поток втекает в циклон с запада. Это более холодный и сухой воздух, начавший опускаться из верхней тропосферы в системе гребня или антициклона, лежащего к северу или северо-западу от данного циклона. Часть этого сухого потока («dry stream» по терминологии Браунинга) обтекает холодную несущую полосу с севера. В результате появляются четкие и сглаженные края облачной «запятой» циклонического вихря. Другая часть сухого потока течет над воздухом теплой несущей полосы либо образует язык сухого воздуха между облачными системами теплой и холодной несущих полос (рис. 4.7).

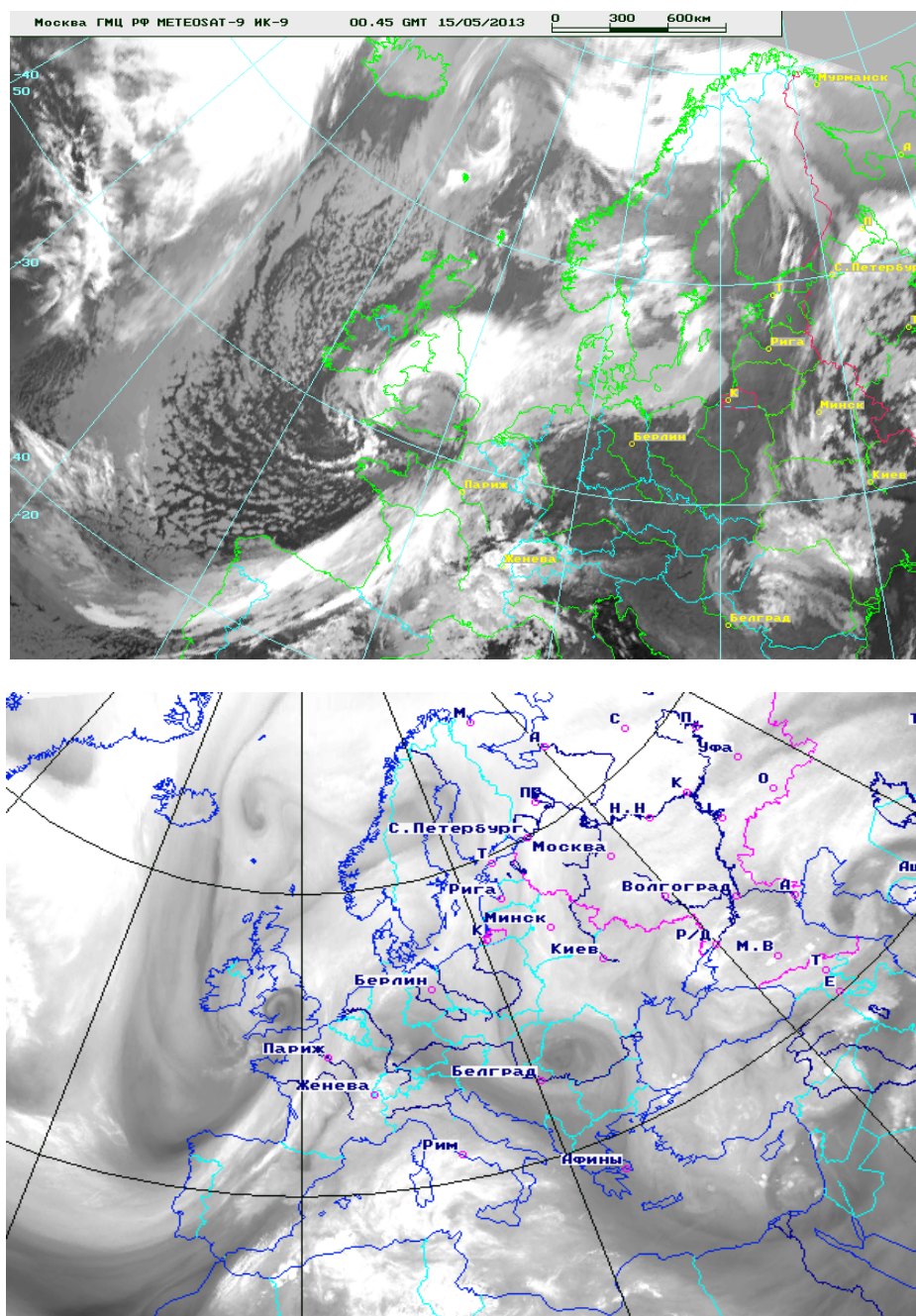
Сухой поток в глубоких циклонах содержит воздух верхней тропосферы и даже слоя тропопаузы и субстратосферный воздух. Это второй очень важный элемент механизма тропосферно-стратосферного обмена, представляющий нисходящую ветвь глубокой вертикальной циркуляции. Сухие потоки хорошо видны на спутниковых снимках в полосе пропускания водяного пара как темные полосы или «завитки» в циклонических вихрях (рис. 4.8).



**Рис. 4.7.** Схема  $\alpha$ -мезомасштабных потоков в системе циклона и гребня (Carlson, 1991): опускающаяся ветвь циркуляции (D–D) разделяется на две части, одна из которых присоединяется к восходящему потоку теплой несущей полосы и достигает насыщения в точке A. Край облачной системы (cloud edge) – проекция западной границы восходящей ветви на поверхность земли, видимая на спутниковых снимках.

Здесь показаны спутниковые снимки в ИК-диапазоне и в полосе пропускания водяного пара за 15 мая 2013 года – циклон над Великобританией. Хорошо видны облачные системы теплой и холодной несущих полос и безоблачный «сухой поток».

В сухом потоке, берущем начало в стратосфере, происходит понижение тропопаузы («складка» или «воронка»), а в потоке теплой несущей полосы образуется «купол». Таким образом, топография тропопаузы оказывается связанной с основными мезомасштабными потоками и облачными системами циклонов. Она формируется теми же вертикальными циркуляциями, поперечными к крупномасштабной бароклинной зоне. В мезомасштабах восходящая и нисходящая ветви этих циркуляций оказываются локализованными, хорошо выделяющимися по своему происхождению и характеристикам. В настоящее время часто можно прочесть утверждения, что мезомасштабные потоки в циклонах являются более важной их частью, с точки зрения генерации осадков и переноса свойств (тепла и влаги), чем даже атмосферные фронты.



**Рис. 4.8.** Типичные облачные системы циклона на спутниковых снимках (Meteosat-9) в ИК-диапазоне (вверху) и в полосе пропускания водяного пара (внизу) 15.05.2013 г.

## Поиск прогностических связей по реальным и модельным данным

Типичная задача, решаемая для целей усовершенствования прогноза тех или иных явлений, – поиск прогностических зависимостей по реальным и прогностическим данным. Для этих целей применяются статистические методы. Они основаны, во-первых, на том, что принимается количественная формулировка предиктанта – величины, которую мы хотим прогнозировать, и, во-вторых, на выборе потенциальных предикторов из физических соображений.

Правильная формулировка предиктанта – залог успеха. Нужно его определить так, чтобы имеющиеся данные были в состоянии дать о нем достоверную информацию, либо чтобы он непосредственно измерялся. Явления, которые необходимо прогнозировать, весьма разнородны, например: факт осадков; интенсивность осадков; наличие атмосферного фронта (проведенного синоптиком? выраженного в поле осадков?); наличие наблюдаемого сильного ветра или шквала. Во всех случаях необходимо определиться, в какой точке (области) наблюдаемый предиктант может быть предсказан, в какой интервал времени.

Потенциальные (предполагаемые) предикторы могут быть взяты в предшествующий явлению момент времени или в момент наблюдения явления. В последнем случае они называются синхронными. Нет смысла брать очень много потенциальных предикторов, их число должно быть, по крайней мере, на порядок меньше размеров выборки. Выбор их определяется физическими соображениями. Хорошее знание физики явления – условие правильного выбора потенциальных предикторов.

Синхронными предикторами удобно пользоваться, если прогноз дается путем постпроцессинга модельных данных. Таковы прогнозы, которые мы даем для авиации (обледенение, конвекция, турбулентность). Часто методы прогноза разрабатываются на фактических данных, как о предикторах, так и о предиктанте. В этом случае говорят, что прогностические зависимости разрабатываются в рамках концепции идеального прогноза (PP – perfect prognosis). Если статистическая зависимость получена на реальных данных, т. е. в рамках концепции PP, то ее предстоит перенести затем на прогностические поля, содержащие ошибки прогноза; при этом статистические связи, как правило, ухудшаются. Если же статистические зависимости отыскиваются на модельных данных о потенциальных предикторах, то они будут, строго говоря, пригодны для работы с той моделью, на выходных данных которой они разработаны, и в этом смысле ограничены. Такой способ постпроцессинга называется MOS – model output statistics.

### **Пример постпроцессинга модельных данных:**

#### **выделение зон фронтов.**

#### **Мера субъективизма при проведении фронтов синоптиком**

Синоптик на картах погоды, где нанесены данные о погоде на станциях, проводит изобары, находит зоны осадков и облачности, а в этих зонах определяет положение линий фронтов. Фронты он определяет как узкие зоны, разделяющие воздушные массы – теплую и холодную. На фронтах, обычно лежащих в ложбинах, наблюдается поворот ветра и наиболее резкие разности температур. Имеются и другие признаки, которые синоптик принимает во внимание: перед фронтом давление падает, за фронтом – растет (или же перед фронтом падает сильнее, чем за фронтом) и т. п. В целом процесс проведения синоптиком фронтов не лишен субъективности. Это и естественно, поскольку в реальной атмосфере, над реальной подстилающей поверхностью те или иные признаки фронтов бывают выражены не всегда одинаково резко.

Отчасти для того, чтобы уменьшить субъективный фактор фронтального анализа, отчасти ради объективизации действий, выполняемых синоптиком, в течение многих лет, начиная с 60-х гг. XX века, предпринимались попытки разработки объективной процедуры проведения фронтов на картах погоды, т. е. составления таких алгоритмов, которые позволили бы обнаружить фронты по данным о давлении, температуре, ветре и каких-либо еще величинах в узлах регулярной сетки или на станциях. Однако заметных успехов никому не удавалось достичь.

В 1996–1997 гг. задача объективного выделения зон фронтов оказалась поставленной перед нашим отделом как одна из частей общей задачи расчета карты особых явлений для авиации. До этого нами были составлены программы расчета скоростей и высот уровня максимального ветра в струйных течениях верхней тропосферы, высоты тропопаузы, зон опасных конвективных явлений – все они представляют методы постпроцессинга модельных данных о геопотенциале, ветре, температуре и влажности. Перечисленные задачи не раз ставились перед сотрудниками Гидрометцентра России, но до создания методик, пригодных для оперативной работы, дело не доходило. Однако задача об объективном выделении зон фронтов ставилась здесь впервые.

Наша разработка по объективному выделению зон фронтов, на мой взгляд, представляет методический интерес как пример тщательной разработки достаточно сложной схемы постпроцессинга. Кроме того, на ее основе мы получили интересные научные результаты.

Рассмотрим основные этапы этой разработки.

Первый этап, как это и должно быть всегда и в любом исследовании, состоял в изучении литературы по проблеме. Публикации были немногочисленные и довольно слабые, но одно из направлений представлялось перспективным. Это были работы американских метеорологов из военно-морского

ведомства (*Clarke, Renard, 1966*), в дальнейшем получившие развитие в работе австрийских специалистов (*Huber-Pock, Kress, 1989*).

Предложенный в последней работе фронтальный параметр имеет вид:

$$\Psi = \nabla |\nabla ZTE| \bar{n}_{ZTE}, \quad (4.6)$$

где

$$ZTE = -\sum (R/g) \bar{T}_e \ln(p_u / p_l). \quad (4.7)$$

Здесь сумма берется в пределах от  $p_l$  до  $p_u$ ,

$$\begin{aligned} \bar{T}_e &= (T_{e,u} - T_{e,l}) / \ln(T_{e,u} / T_{e,l}), \\ T_e &= T + Lq / c_p, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $T_e$  – эквивалентная температура;  $q$  – массовая доля влаги. Величина  $ZTE$  называется эквивалентной толщиной слоя, размерность ее – потенциальные метры.

Таким образом,  $\Psi$  является характеристикой бароклинности в слое от  $p_l$  до  $p_u$  – т. е. в слое 850–500 или 925–700 гПа.

Авторы работы предлагают использовать поле  $\Psi$  для проведения фронтов на картах погоды, т. е. для диагноза наличия фронтов, но не их интенсивности.

Положение фронтов определяется как положение гребневых линий в поле  $\Psi$ , причем принимаются в рассмотрение лишь достаточно большие положительные  $\Psi$ .

По существу этот параметр содержит информацию не только о положении, но и об интенсивности фронтов (об остроте контрастов в поле эквивалентной температуры), так как значения  $\Psi$  тем больше, чем больше бароклинность в слое.

На втором этапе, изучив эти работы, мы составили программу расчета  $\Psi$  и рассчитали поля этого параметра по значительной выборке данных (по европейской России за зимний сезон 1990/91 гг. Проанализировав результаты, мы обнаружили, что получаемые зоны действительно соответствуют фронтам, однако таким образом обнаруживаются только очень интенсивные фронты. Этот вывод является качественным, поскольку не существует критерия наличия фронтов либо каких-нибудь объективных наблюдений за прохождением фронтов или их наличием. Наоборот, имеется признаваемый всеми субъективизм при проведении фронтов, так что синоптические карты нельзя считать источником данных о фронтах хотя бы потому, что другой синоптик может провести фронты не совсем так, как тот, кто проводил их на карте.

Поэтому мы вынуждены были на этом остановиться и обратиться к оценке меры субъективности проведения фронтов.

Третий этап работ состоял в составлении электронного архива фронтального анализа, проводимого в различных прогностических подразделениях Гидрометцентра России. (В настоящее время такой анализ было бы невозможно провести). Были взяты параллельные архивы карт погоды, используемые в Гидрометцентре России: архив отдела синоптических краткосрочных прогнозов погоды (ОСКПП), архив тогдашнего Регионального центра зональных прогнозов для авиации (РЦЗП, ныне ЛЗП ОАМ), и архив отдела анализа мировой погоды (ОАМП) за январь–февраль 1990 и октябрь 1994 г. Предварительно было проведено кодирование наличия или отсутствия фронтов различных типов по всем трем архивам. Все карты в соответствующих подразделениях анализировались вручную на бумажных бланках. Коды фронтов в квадратах сетки  $2,5 \times 2,5^\circ$  задавались следующим образом:

Тип фронта (по анализу синоптика)	Цифра кода
Основной холодный	1
Основной теплый	2
Фронт окклюзии	3
Точка окклюзии	4
Точка смены знака фронта	5
Вторичный фронт	6
Отсутствие фронтов	0

Для кодировки на карты накладывалась палетка из кальки, квадрат за квадратом просматривались и кодировались вручную. Сравнение архивов ОСКПП и РЦЗП проводилось по 7722 квадратам сетки на территории европейской России, ОСКПП и ОАМП – по 6435 квадратам. После этого сравнивались результаты кодирования по паре архивов и определялись коэффициенты абсолютного и относительного согласия,  $k_a$  и  $k_o$ . Первый определялся как процент квадратов, в которых анализ в двух архивах совпадал как по факту наличия и отсутствия фронта, так и по его типу; второй – процент квадратов, в которых мнение двух синоптиков совпадало в отношении наличия или отсутствия фронта, но тип фронта они определяли по-разному.

Опуская детали, укажем основные результаты. В сумме для обеих пар выборок получилось  $k_a = 80,1\%$  и  $k_o = 84,8\%$ . В эти цифры большой вклад внесли случаи отсутствия фронтов в обоих архивах. Если же говорить о наличии фронтов, то одинаковый диагноз наличия фронта и его типа имел место в 23–30 % случаев наличия фронтов в одном из архивов. При этом число квадратов с фронтами в разных архивах сильно различается (по всей выборке – на 22 %).

Наибольший вклад вносят расхождения следующих типов:

- А. Наличие фронта в одном архиве при его отсутствии в другом:
- при совпадении положения точки окклюзии теплый сектор имеет неодинаковую ширину;
  - система фронтов в циклоне сдвинута по широте относительно ее положения в другом архиве;
  - в размытой фронтальной зоне с ориентацией, близкой к широтной, фронты с волнами параллельны в двух архивах, но сдвинуты друг относительно друга на 2,5–5 градуса по широте;
  - в одном из архивов проведен фронт окклюзии в теплом секторе циклона;
  - в одном из архивов проведен вторичный холодный фронт в тылу циклона.
- В. Несовпадение типов фронтов при их наличии в обоих архивах:
- обозначение фронта как основного в одном архиве и как вторичного в другом;
  - из-за разной локализации точек смены знака на фронте с волнами участки холодного фронта на одной карте обозначены как участки теплого фронта на другой карте.

Расхождения группы А встречаются намного (в 6–7 раз) чаще.

Напомним, что под «согласием» диагноза фронтов подразумевалось лишь нахождение их в одном и том же квадрате  $2,5 \times 2,5^\circ$ .

Для более наглядного представления о мере соответствия можно один из архивов (ОСКПП) представить как «факт», а два других – как «прогноз» и оценить успешность последнего в двух вариантах: в первом прогнозируется наличие либо отсутствие фронта, но не его тип; во втором – также и тип фронта.

В целом по обеим выборкам прогноз первого типа оказывается эффективным (критерий Пирси равен 0,403, критерий Хайдке – 0,422). Но при этом предупрежденность наличия фронтов составила всего 48,5 % (то есть, менее половины фронтов из анализа ОСКПП соответствовали анализам других подразделений), при общей оправдываемости (в основном за счет случаев отсутствия) 84,5 %. Прогноз второго типа оказался незначимым (критерии Пирси и Хайдке – 0,22 и 0,23 соответственно).

Приведем формулы для критериев Пирси (Peirce) и Хайдке (Heidke):

$$PI = \frac{\varphi(\lambda - k)}{\lambda(1 - k)}, \quad H = \frac{2\varphi(\lambda - k)}{\lambda + \varphi(1 - 2k)}$$

Здесь  $\varphi$  – предупрежденность прогноза наличия явления;  $\lambda$  – оправдываемость прогноза наличия явления;  $k$  – природная повторяемость явления. При идеальном прогнозе  $PI = H = 1$ . Предупрежденность – это доля реально наблюдавшихся явлений, которая была правильно предсказана; оправдываемость прогноза наличия явления – это доля прогнозов наличия явления, которая оправдалась. Теоретически, прогноз будет лучше случайного при



$PI > 0,25$ . На практике считается, что прогноз практически значим, если по достаточно репрезентативной выборке наблюдений получается  $PI > 0,3$ . Такие же пороги практической значимости принимаются и для критерия  $H$ . Заметим, что английская фамилия Reigse читается как «Пирс», но с чьей-то легкой руки ее уже традиционно у нас произносят как «Пирси».)

Таким образом, мы получили оценку вклада субъективного фактора во фронтальный анализ, проводимый синоптиками. Причем синоптики Гидрометцентра России – квалифицированные специалисты. Оказалось, что субъективный фактор играет большую роль. Так, если один из анализов принять условно за факт, а другой – за прогноз, то значимость такого прогноза, по обычно применяемым критериям, может оказаться очень низкой, вплоть до уровня случайного прогноза. Отсюда следует, **что никакой конкретный синоптический архив не может безоговорочно использоваться как источник фактических данных о фронтах при оценке успешности независимого метода объективного анализа фронтов.**

С другой стороны, проведенное количественное сравнение показало, что первый вариант прогноза по обеим выборкам является значимым. То есть результаты фронтального анализа, выполненного в различных подразделениях, все же в основных чертах (если рассматривать лишь наличие либо отсутствие фронта, но не его тип) согласуются между собой. В этих пределах можно использовать фронтальный анализ, проводимый синоптиками, для получения статистических данных о ситуациях, в которых синоптики чаще проводят фронты или, наоборот, не проводят их.

Четвертый этап работы состоял в изучении повторяемости проведенных синоптиками фронтов в зависимости от топографии барического поля.

Была разработана программа объективной классификации барических ситуаций, состоящей в следующем. Участок приземного барического поля  $4 \times 4$  узла широтно-долготной сетки объективного анализа (ОА) в окрестности данного квадрата сравнивался поочередно с эталонными полями, каждое из которых соответствовало одному из 23 классов барических ситуаций:

<b>0</b>	малоградиентное поле	<b>3</b>	центр циклона
<b>1</b>	седловина	<b>4</b>	гребень
<b>2</b>	центр антициклона	<b>5</b>	ложбина

#### Периферия антициклона

<b>6</b>	северо-восточная	<b>10</b>	западная
<b>7</b>	юго-западная	<b>11</b>	восточная
<b>8</b>	северо-западная	<b>12</b>	южная
<b>9</b>	юго-восточная	<b>13</b>	северная

### Периферия циклона

14	юго-западная	19	восточная
15	северо-восточная	20	северная
16	северо-западная	21	южная
17	юго-восточная	22	прямолинейные изобары
18	западная	23	неидентифицированные поля

Эталонные поля (размер  $4 \times 4$  узла) заданы значениями в узлах сетки. Сравнение участка наблюдаемого поля с эталонными полями производится путем расчета коэффициентов корреляции. Поле относилось к тому конкретному классу, для которого коэффициент корреляции был максимальным, но не меньше 0,7. Коэффициенты корреляции между эталонными полями не превосходят 0,54 (порог значимости для 16 точек). Если лапласиан наблюдаемого поля оказывался отрицательным (положительным), то сравнение этого поля с циклоническими (антициклоническими) эталонными полями не производилось.

Таким образом, каждый квадрат сетки ОА рассматривается вместе с его окрестностью и не производится расчленение поля на участки с четкими границами.

Полученная программа классификации синоптических ситуаций была затем применена к обучающей выборке закодированных фронтов, проведенных синоптиками ОСКПП. Для каждого класса ситуаций определялась повторяемость фронтов. Как и следовало ожидать, большая часть (79 %) фронтов было проведено в следующих 5 ситуациях, каждая из которых характеризуется повторяемостью фронтов, превышающей 20 % (средняя по выборке повторяемость фронтов в этом архиве составила 17,5 %): ложбина, центр циклона и его восточный, южный и в особенности юго-восточный секторы.

Вся обучающая выборка была в результате процедуры классификации барических ситуаций разбита на подвыборки.

Роль барической ситуации видна из следующего примера: если все классы, которым соответствуют частные выборки с повторяемостью фронтов, превышающую заданную, считать классами наличия фронтов, а остальные – классами отсутствия, то получим значимую успешность разделения: так, при пороговой повторяемости 20 % получается оправдываемость и предупрежденность наличия фронтов 30,1 и 65,5 % соответственно, а критерии Пирси и Хайдке – 0,36 и 0,25 соответственно. То есть даже такой примитивный способ выделения условий, в которых синоптики проводят фронты, дал результаты, намного лучшие случайного прогноза.

Следующим этапом было определение наиболее информативных предикторов наличия фронтов в каждой из подвыборок с помощью стандартного аппарата линейного дискриминантного анализа.

Был сформирован набор потенциальных предикторов:

- 1) адвекция температуры на поверхности 850 гПа;
- 2) поворот ветра на поверхности 925 гПа;
- 3) лапласиан температуры на поверхности 925 гПа;
- 4) лапласиан температуры на поверхности 850 гПа;
- 5) градиент приземной температуры;
- 6) градиент температуры на поверхности 925 гПа;
- 7) градиент температуры на поверхности 850 гПа;
- 8) лапласиан высоты поверхности 925 гПа;
- 9) лапласиан высоты поверхности 850 гПа;
- 10) градиент толщины слоя 925–500 гПа;
- 11) градиент толщины слоя 925–700 гПа;
- 12) градиент функции  $ZTE$  (850–500);
- 13) градиент модуля  $|\nabla ZTE_{850}^{500}|$ ;
- 14) градиент функции  $ZTE$  (925–700);
- 15) градиент модуля  $|\nabla ZTE_{925}^{700}|$ ;
- 16) градиент  $T_e$  на поверхности 850 гПа.

Дискриминантный анализ производился как по выборке в целом, так и по частным выборкам, соответствующим той или иной барической ситуации. Попытки разделения классов наличия и отсутствия фронтов по одному предиктору не дали практически значимого результата. При использовании двух предикторов наилучшее разделение классов обеспечивают сочетания предикторов 12 и 8, а также 12 и 9. Однако успешность прогноза все равно ниже, чем только по барическим ситуациям.

При анализе частных выборок обнаружилось, что успешность разделения резко увеличивается, и при этом сочетания предикторов, обеспечивающие наиболее успешное разделение, неодинаковы для различных барических ситуаций. По всем частным выборкам получены значимые критерии Пирси и Хайдке. Отсюда, по-видимому, следует, что в сходных барических ситуациях синоптик руководствуется сходными признаками при проведении фронтов.

На основе результатов дискриминантного анализа частных выборок в качестве следующего этапа разработки был подобран оптимальный набор решающих правил, обеспечивающий наилучшие показатели успешности диагноза фронтов на обучающей выборке при относительной простоте решающих правил. Для этого был составлен список дискриминантных функций, обеспечивающих наилучшее разделение для частных выборок, которых после ряда экспериментов оказалось 47. Каждая функция зависит от двух предикторов из приведенного выше списка. Наиболее информативными предикторами (входящими в наибольшее число дискриминантных функций и обеспечивающих наилучшее разделение) оказались предикторы 12 и 5 (входят в 17

и 12 дискриминантных функций соответственно), далее следуют предикторы 14 и 1 (входят в 7 и 6 дискриминантных функций соответственно).

Таким образом, метод объективного выделения зон фронтов формулируется следующим образом:

1. Для каждого квадрата сетки ОА или численного прогноза определяются классы синоптической ситуации.
2. Выбирается решающее правило для данной ситуации и производится расчет дискриминантной функции.
3. По значению дискриминантной функции определяется вероятность  $p$  наличия фронта в данном квадрате.

После этого программа переходит к расчету для следующего квадрата. Когда все точки обчислены, в поле проводятся изолинии  $p$  и выделяются зоны высокой вероятности фронтов.

Когда этот алгоритм был нами разработан и проверен на независимом материале (архив РЦЗП), оказалось, что в среднем на зависимой и независимой выборках критерий Пирси  $PI$  равен 0,40 и 0,30 соответственно. Но не все типы фронтов одинаково успешно обнаруживаются этим алгоритмом. Так, для основных холодных фронтов  $PI$  равен 0,59 и 0,54, для основных теплых – 0,49 и 0,50, для окклюзий – 0,39 и 0,45, для вторичных холодных – 0,27 и 0,24.

Естественно встал вопрос о внедрении метода, а перед тем – о его оперативных испытаниях. Поскольку выше было показано, что ни один синоптический архив фронтального анализа не может безоговорочно рассматриваться как «факт» из-за большой роли субъективного фактора, встал вопрос о том, что же можно считать за таковой.

Известно, что атмосферные фронты проявляются, прежде всего, в полях облачности и осадков, а также в полях ветра, барических тенденций и прочих. В частности, давно установлен и вошел во все учебники тот факт, что осадки в средних широтах выпадают преимущественно на атмосферных фронтах. Если это так, то выделяемые тем или иным способом на картах погоды зоны фронтов должны удовлетворять признаку реальных фронтов: быть зонами преимущественного выпадения осадков. В противном случае придется констатировать неэффективность примененного способа выделения фронтов.

Осадки имеют то преимущество, по сравнению с другими особенностями погоды на фронтах, что они инструментально измеряются на станциях с удовлетворительной точностью и данные о них архивируются. Они совершенно независимы от синоптических архивов и вполне объективны.

Естественно поэтому, если мы выделяем каким-либо объективным методом зону фронта, требовать, чтобы ее положение согласовалось с положением зоны осадков. Согласие следует считать тем более хорошим, чем большая часть случаев осадков наблюдается в пределах зоны фронта. Иными словами, в пределах зоны фронта надо диагностировать, по данным объективного ана-

лиза или численного прогноза, наличие осадков, а вне этой зоны – их отсутствие. При этом:

- предупрежденность наличия осадков должна быть высокой (много больше 50 %);
- критерий Пирси должен быть значимым;
- непрерывно меняющийся фронтальный параметр должен быть связан прямой зависимостью с повторяемостью осадков: чем больше фронтальный параметр, тем больше повторяемость осадков внутри соответствующей его изолинии. Таким образом, степень активности фронта будем понимать как степень интенсивности осадкообразующих процессов на этом фронте.

Мы применили сформулированные требования к описанному выше методу расчета вероятности наличия фронта и к ранее освоенному методу, основанному на расчете параметра  $\Psi$ .

В качестве выборки для авторской проверки были взяты данные о полусуточных суммах осадков на станциях европейской России, преобразованные в данные в квадратах сетки. Это делалось следующим образом. Если за конкретный срок в квадрате имелись данные более чем одной станции, то из измеренных сумм осадков выбиралась максимальная величина. Так формировался файл максимальных наблюдаемых сумм осадков по квадратам сетки. По этой выборке за зимний сезон 1998/99 гг. (27639 значений, в том числе 13996 – за дневные и 13643 – за ночные часы) проведено сопоставление с рассчитанными по ОА фронтальными параметрами  $p$  и  $\Psi$ . При этом решающее значение придавалось градации интенсивности осадков  $I > 1$  мм/12 ч: за ее пределами остаются лишь самые слабые осадки, которые чаще, чем более интенсивные, могут выпадать во внутримассовых условиях (например из подинверсионных слоистых облаков).

Относительно параметра  $\Psi$  оценка показала, что при достаточно малых пороговых значениях, принимаемых за границу фронтальной зоны, диагноз наличия осадков внутри этой зоны будет иметь значимую успешность ( $P_i = 0,31$ ), но все же в пределах зоны будет наблюдаться менее половины всех осадков. Повторяемость осадков внутри изолинии  $\Psi$  с ростом  $\Psi$  вначале (при малых значениях) возрастает, но затем рост замедляется и даже сменяется убыванием. Таким образом, применительно к осадкам  $I > 1$  мм/12 ч параметр  $\Psi$  не удовлетворяет двум из трех сформулированных требований: в зонах, ограниченных даже самой внешней из надежно проводимых (с учетом точности расчета) изолиний  $\Psi$  сосредоточивается менее половины случаев осадков, и монотонного роста их повторяемости с ростом  $\Psi$  не наблюдается. Отсюда следует, что способ выделения фронтальных зон как зон значимого параметра  $\Psi$  является неэффективным.

Однако надо учесть и другие обстоятельства:

1. Зоны больших  $\Psi$  занимают лишь малую часть области расчета, и большинство случаев наличия осадков остается вне этих зон. Однако в самих зонах больших  $\Psi$  повторяемость осадков превышает среднюю в 2–2,5 раза.

2. Связь сильных и очень сильных осадков ( $I > 6$  мм/12 ч) с параметром  $\Psi$  намного лучше, чем осадков ( $I > 1$  мм/12 ч). Кроме того, имеется монотонный рост повторяемости сильных и очень сильных осадков с ростом  $\Psi$ , причем в зонах больших  $\Psi$  их повторяемость превышает среднюю в 3–4 раза. То есть применительно к этой градации интенсивности (в которой средняя по выборке повторяемость составляет всего 3,4 %) параметр  $\Psi$  в общем удовлетворяет требованиям, сформулированным выше. Это означает, что сильные осадки в большей степени, чем более слабые, ассоциируются с интенсивными бароклиническими зонами в нижней половине свободной атмосферы.

Перейдем к анализу результатов для введенного нами параметра  $p$ , полученного путем объективизации опыта наших синоптиков в проведении фронтов. Он является характеристикой не только бароклиничности в нижней половине тропосферы, но и циклоничности поля давления у земли и в нижней тропосфере.

Связь повторяемости осадков с параметром  $p$  оказывается достаточно тесной. Он удовлетворяет всем трем требованиям, поставленным выше, как для осадков  $I > 1$  мм/12 ч, так и для более высоких градаций. Для сильных и очень сильных осадков получаем снова более тесную зависимость повторяемости осадков от фронтального параметра: более высокие значения индекса Пирси, более высокий процент осадков, наблюдающихся внутри изолинии. Оба эти показателя значительно лучше у параметра  $p$ , чем у  $\Psi$ .

Таким образом, учет характера барического поля и более гибкий учет бароклиничности (неодинаковые ее характеристики используются для разных участков барического поля) привели к повышению эффективности объективного выделения зон фронтов. Области, ограниченные изолинией  $p = 15$ , являются реально зонами преимущественного выпадения осадков, причем повторяемость осадков (всех градаций  $I > 1$  мм/12 ч, но в особенности сильных и очень сильных) возрастает с ростом  $p$ . Прогноз наличия осадков в зонах фронтов и их отсутствия вне этих зон имеет значимые критерии Пирси, а предупрежденность прогноза наличия для осадков двух рассмотренных градаций интенсивности составляет 66,6 и 72,5 % соответственно.

Опыт расчета полей  $\Psi$  и  $p$  привел нас к выводу, что выделение с помощью параметра  $\Psi$  немногочисленных интенсивных фронтальных зон хотя само по себе и не обеспечивает успеха, может оказаться полезным как для улучшения графического представления результатов, так и для того, чтобы лучше выделить наиболее интенсивные участки фронтальных зон. Далее поиск лучшей линейной комбинации  $\Psi$  и  $p$  показал, что коэффициенты этой линейной комбинации должны быть одного порядка. На основании таких соображений и оценок был введен и испытан безразмерный фронтальный параметр

$$F = p + \Psi. \quad (4.9)$$

На большей части рассматриваемой области  $F$  близок к  $p$ , но в зонах больших  $\Psi$  (а это около 10 % площади региона) поправки значительны.

Как предиктор повторяемости осадков параметр  $F$  значительно более эффективен, чем  $p$ , и тем более чем  $\Psi$ . Значения критерия Пирси возросли, и для  $I > 1$  мм/12 ч максимум (0,40) достигается при  $F = 20$ . Это значение в дальнейшем и принято за границу фронтальной зоны. Внутри ее попадает 71,5 % случаев осадков  $I > 1$  мм/12 ч, а их повторяемость за пределами этой зоны составила только 10,7 %. Монотонный рост повторяемости осадков с ростом  $F$  сохраняется на всем интервале значений  $F$ . Таким образом, параметр  $F$  обеспечивает наиболее эффективное выделение зон фронтов.

Этот вывод подтверждается и распределением сильных и очень сильных осадков: успешность выделения их зон выше, чем у каждого слагаемого в отдельности. Так, внутри зоны, очерченной изолинией  $F = 20$ , попадает 80 % случаев осадков  $I > 6$  мм/12 ч.

Очень интересен следующий эксперимент. Вместо эквивалентной температуры, как в формуле для  $\Psi$ , так и в списке предикторов, употребляемых при расчете  $p$ , мы использовали обычную температуру и получили таким образом «сухой» фронтальный параметр  $F^*$ , после чего произвели расчет повторяемости осадков по грациям их интенсивности в зависимости от этого параметра. Оказалось, что «сухой» фронтальный параметр  $F^*$  также удовлетворяет условиям, сформулированным для эффективного фронтального параметра. Именно, в зонах  $F^* > 15$  сосредоточивается 70,7 и 76,8 % случаев осадков  $I > 1$  мм/12 ч и  $I > 6$  мм/12 ч соответственно, а критерии Пирси в довольно широком диапазоне значений  $F^*$  являются значимыми, хотя и намного меньшими, чем для параметров  $F$  и  $p$ . Повторяемость осадков монотонно возрастает с ростом  $F^*$ . Иначе говоря, с помощью  $F^*$  можно давать прогноз осадков с хорошей предупрежденностью и значимой успешностью. Правда, он будет сильно уступать по эффективности параметрам  $F$  и  $p$ , но выигрывает в сравнении с  $\Psi$ , так как большая часть случаев осадков будет наблюдаться в зонах, больших  $F^*$ .

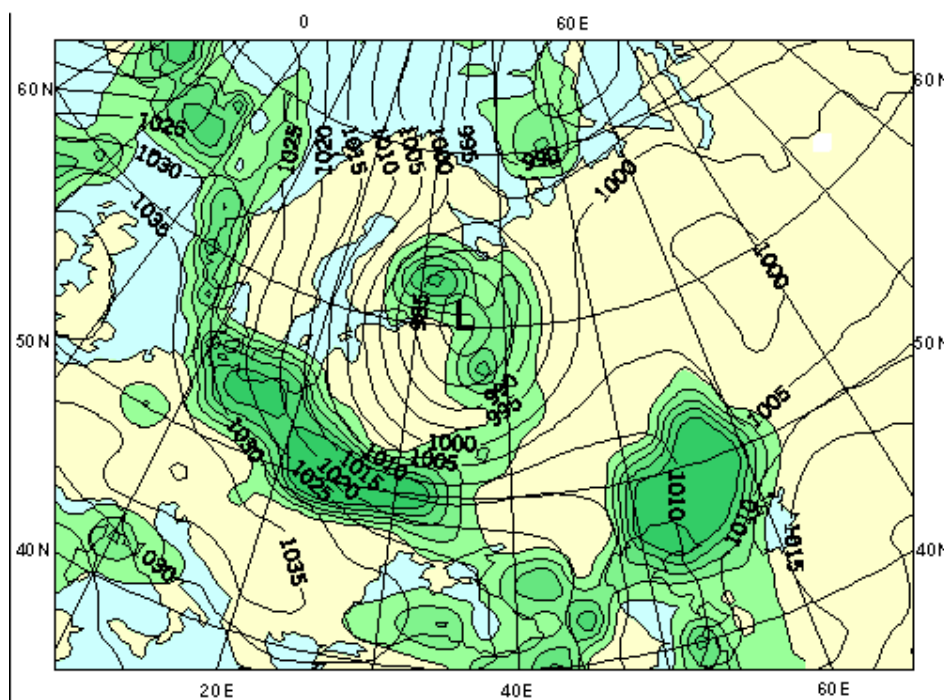
Вклад контрастов влажности в характеристики бароклинности, таким образом, хотя и значителен в количественном отношении, но не играет решающей роли в качественном отношении.

Подчеркнем, что учет влажности здесь принципиально отличается от имеющего место в численных моделях: процессы конденсации и другие подсеточные эффекты не включаются в рассмотрение. Фронтальные параметры, рассматриваемые в данном случае, характеризуют динамическое вынуждение осадков сеточного масштаба.

Фронтальный параметр  $F$  прошел оперативные испытания и в настоящее время оперативно рассчитывается по прогностическим полям спектральной модели Гидрометцентра России и модели УКМО, ведутся работы по его включению в систему ГИС МЕТЕО.

На рис. 4.9 и 4.10 показаны пример расчета фронтального параметра на территории Европы и взятый с сайта Гидрометцентра России пример оперативного расчета его поля по территории России.

16.11.2001 00 ч ВСВ

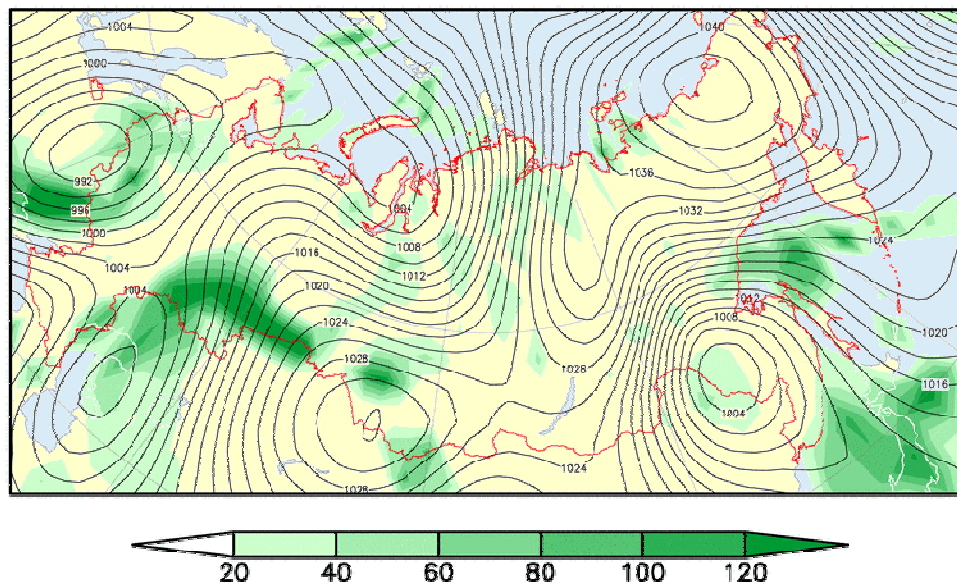


**Рис. 4.9.** Пример рассчитанного по территории Европы поля фронтального параметра  $F$  по данным модели УКМО с заблаговременностью 24 ч за 16.11.2001 г. 00 ч ВСВ. Тонкими сплошными линиями показаны изобары у земли. В качестве границы фронтальной зоны принята изолиния  $F = 20$ . Густота заливки пропорциональна значениям  $F$ .

На карте цветовыми градациями представлены значения фронтального параметра, пропорционального интенсивности фронтов. Расчеты основаны на данных численного прогноза метеорологических полей, выпускаемого метеоцентром Экзетер, Великобритания (расчетная сетка  $2,5 \times 2,5^\circ$ ). Изолиниями представлено прогностическое поле атмосферного давления на уровне моря.



25.03.2009 00 ч ВСВ



**Рис. 4.10.** Пример рассчитанного по территории России поля фронтального параметра  $F$  по данным модели UKMO с заблаговременностью 24 ч за 25.03.2009 г. 00 ч ВСВ. Тонкими сплошными линиями показаны изобары у земли. В качестве границы фронтальной зоны принята изолиния  $F = 20$ . Густота заливки пропорциональна значениям  $F$ .

### Диагностические расчеты: факторы вынуждения осадков

Помимо задач постпроцессинга, расчеты динамически значимых величин по реальным данным или по модельным прогностическим полям – диагностические расчеты – проводятся с целью исследования реального вклада тех или иных механизмов в процесс, представленный этими реальными данными. Диагностические расчеты широко используются в современной динамической метеорологии, в частности вследствие появления баз данных объективного анализа и реанализа.

Продемонстрируем возможности диагностических расчетов на примере наших работ по исследованию механизмов вынуждения осадков в средних широтах.

Из предыдущего изложения можно заключить, что как наличие, так и интенсивность осадков определяются, с одной стороны, наличием атмосферного фронта, его интенсивностью (то есть степенью бароклинности в его зоне), с другой стороны – наличием и степенью конвективной неустойчивости.

Далее, играет роль фронтогенез или фронтолиз на фронте, которые определяют тип фронта (анафронт или катафронт), зависящий от направления компенсационных циркуляций в бароклинной зоне. Динамическими характеристиками наличия таких вертикальных циркуляций являются фронтогенетические функции, а также высота динамической тропопаузы. Не следует забывать, что информацию о том, имеется ли на фронте фронтогенез (т. е. является ли фронт обостряющимся) несет и сам фронтальный параметр, поскольку он определяется с учетом топографии барического поля.

В рамках общего рассмотрения динамики крупномасштабных движений мы видели, что восходящие движения в атмосфере средних широт, являющиеся необходимым условием возникновения облаков и осадков, развиваются главным образом в результате процессов, нарушающих баланс термического ветра либо гидростатический баланс. Как было показано выше, к таким процессам относятся неоднородная адвекция в бароклинные зоны (фронтогенез и фронтолиз) и конвективная неустойчивость. Вообще говоря, к вынуждающим факторам относится также трение в пограничном слое, но этот фактор сравнительно слаб. Первый из перечисленных процессов играет важнейшую роль в зонах атмосферных фронтов, где и выпадает большая часть осадков. При фронтогенезе в этих зонах развиваются поперечные циркуляции с восходящей ветвью в теплой воздушной массе. При фронтолизе также развиваются поперечные циркуляции, но их восходящие ветви располагаются в холодном воздухе. Мы видели также, что поперечные циркуляции могут захватывать мощные слои воздуха, включая всю тропосферу и нижнюю стратосферу, при этом происходит деформация тропопаузы с понижением ее в зонах опускания (при фронтогенезе – во фронтальной зоне и в зафронтальном холодном воздухе) и повышением на стороне теплого воздуха. Таким образом, вертикальные движения, а следовательно, и осадки, определяются динамическими факторами – бароклинностью и взаимодействием полей ветра и температуры, формирующими поле адвекции, и, таким образом, являются результатом динамического вынуждения со стороны указанных факторов.

Отсюда следует, что условия развития восходящих движений можно определить через диагностические характеристики полей давления, температуры и ветра. Удачно выбранная система диагностических характеристик (диагностик), выявляя зоны восходящих движений, будет тем самым выявлять зоны облачности и осадков. Если такие диагностики рассчитаны по прогнозным полям, то их можно использовать для прогноза осадков (альтернативного по отношению к прямому численному моделированию).

Естественно к таким диагностикам отнести фронтальный параметр, алгоритм расчета которого изложен выше. Также естественно включить в рассмотрение скалярную фронтогенетическую функцию  $FG$ . Хотя, как мы говорили выше, эта величина рассчитывается с малой точностью, причем обнаруживаются только зоны очень сильного фронтогенеза и фронтолиза, – однако есть смысл проверить, является ли эта величина значимой как предиктор осадков.

Распределения повторяемости осадков в зависимости от  $FG$  показывают, что как при фронтогенезе, так и при фронтолизе повторяемость осадков выше, чем на стационарных ( $FG = 0$ ) фронтах.

Далее, очевидно, в число потенциальных предикторов целесообразно включить характеристику конвективной неустойчивости –  $LNB$ , хотя она и не является независимой от фронтального параметра.

В качестве четвертой диагностики мы использовали высоту динамической тропопаузы как изоповерхности потенциального вихря  $PV = 4$  рву. Как указывалось выше, высота тропопаузы связана с глубокими поперечными циркуляциями во фронтальных зонах. Поэтому можно предполагать наличие связи между высотой тропопаузы и осадками, выпадающими на атмосферных фронтах.

Обратим внимание на то, что из выбранных четырех потенциальных предикторов один ( $LNB$ ) сильно зависит от влажности, другой – фронтальный параметр – слабо зависит от нее (через эквивалентную добавку к температуре), а два остальных совсем не зависят от влажности. Это является преимуществом, поскольку измеренные, а в особенности прогностические значения влажности отличаются низкой точностью, в сравнении с давлением, температурой и ветром.

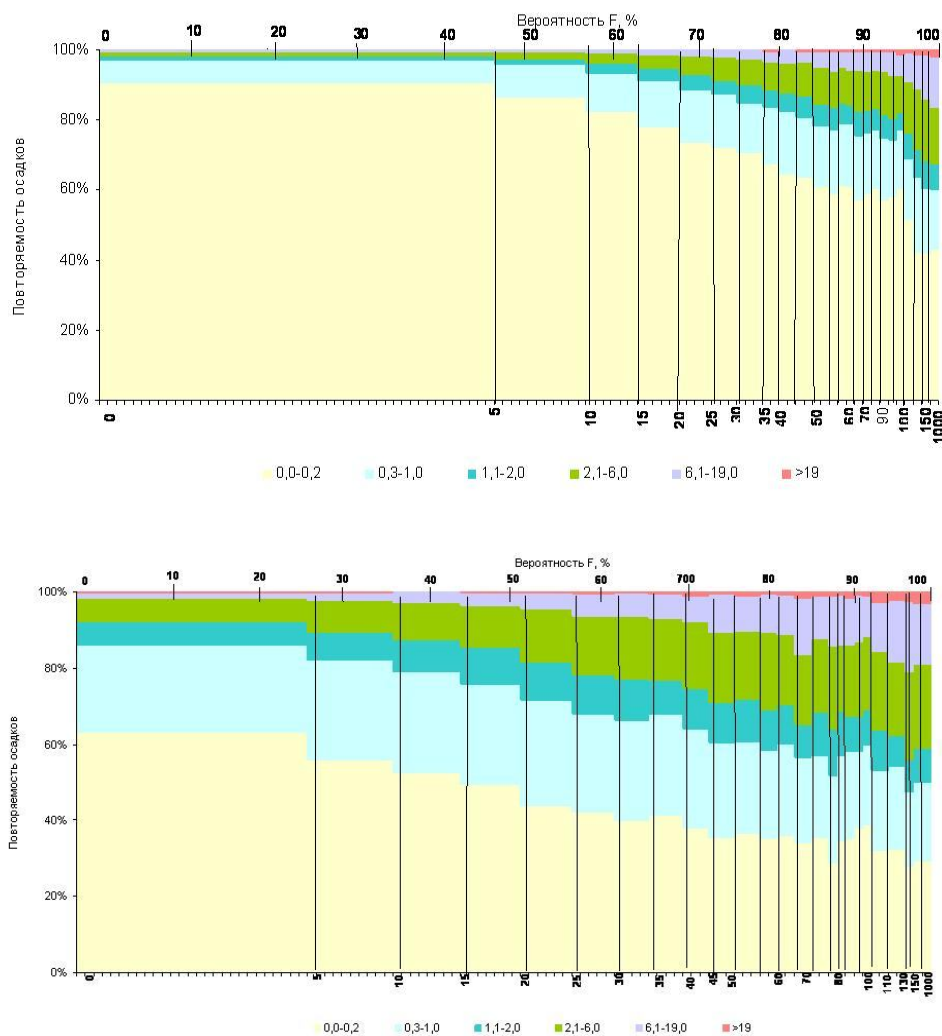
Распределение осадков в плоскости  $F$ ,  $TR$ , где  $TR$  – давление на уровне 1 рву, т. е. на нижней границе переходного слоя от тропосферы к стратосфере, показывает (слабую) зависимость от высоты тропопаузы: наибольшая повторяемость осадков  $I > 1$  мм/12 ч при низкой тропопаузе на фронтах, наименьшая – при высокой тропопаузе вне фронтов. Для сильных осадков ( $I > 1$  мм/12 ч), наоборот, повторяемость минимальна при низкой тропопаузе и максимальна при высокой – в обоих случаях это наблюдается на фронтах и лучше выражено летом.

Эффект конвективной неустойчивости значительно более сильный, чем фронтогенеза и высоты тропопаузы.

Далее мы будем оценивать прогностическую значимость отдельных вынуждающих факторов как предикторов осадков с помощью критерия  $PI$ . Этот критерий предназначен для оценки альтернативного прогноза наличия или отсутствия какого-либо явления, т. е. для тех условий, когда как наблюдения, так и прогнозы представляются в виде дихотомических переменных (принимающих значения 0 и 1).

Мы построили спектры повторяемости осадков различных градаций интенсивности по данным о полусуточных осадках на станциях бывшей европейской части СССР (ЕТС) вначале за один год (по сезонам), затем по более длинным промежуткам времени. При этом принимались в рассмотрение вначале максимальные осадки в пределах квадрата сетки, а позже мы стали включать все данные об осадках или их отсутствии на всех имеющихся станциях. На рис. 4.11 показаны результаты за пять весенних сезонов. По гори-

зонти отложены значения фронтального параметра в масштабе, соответствующем повторяемости значений  $F$ .



**Рис. 4.11.** Спектры повторяемости осадков при устойчивой (вверху) и неустойчивой (внизу) стратификациях за весенний сезон (1999–2004гг.).

Видно, что начиная с  $F = 15$  при неустойчивой стратификации повторяемость факта осадков (независимо от градации, но  $I > 0,3$  мм/12 ч) превышает 50 %. При устойчивой стратификации повторяемость факта осадков  $I > 0,3$  мм/12 ч превышает 50 % только на очень резких фронтах ( $F > 100$ ). Повторяемость сильных и очень сильных осадков на интенсивных фронтах и

вне их различается на порядок как при устойчивой, так и при неустойчивой стратификации, но при неустойчивой она намного больше при равных  $F$ . Особенно велика разность в повторяемости осадков  $I > 2$  мм/12 ч. Обратим внимание на то, что повторяемость осадков тем сильнее зависит от  $F$ , чем сильнее сами осадки. Повторяемость самых слабых осадков (0,3–1 мм/12 ч) практически не зависит от фронтального вынуждения при неустойчивой стратификации, а при устойчивой зависит, хотя и довольно слабо, и при этом она значительно выше при неустойчивой стратификации, чем при устойчивой (табл. 4.1).

Таблица 4.1

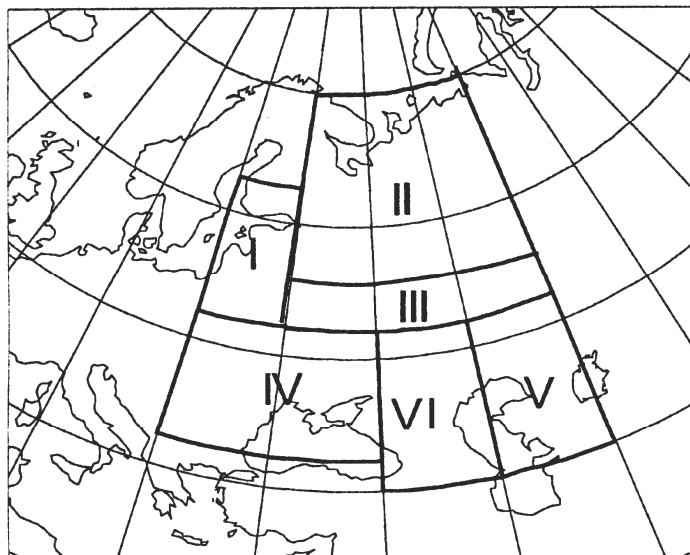
Критерий Пирси для одиночных диагностических характеристик и их парных сочетаний как предикторов осадков  $I > 1$  мм/12 ч,  $I > 6$  мм/12 ч,  $I > 19$  мм/12 ч на ETC по сезонам

Предиктор	Сезон	$F$			$LNB$			$FG$			$TR$		
		>1	>6	>19	>1	>6	>19	>1	>6	>19	>1	>6	>19
$F$	Зима	.40	.46	.38	.43	.48	.42	.40	.47	.41	.42	.47	.41
	Весна	.37	.40	.38	.43	.46	.47	.38	.42	.41	.39	.41	.40
	Лето	.28	.31	.31	.38	.40	.42	.28	.31	.32	.29	.31	.32
	Осень	.38	.44	.42	.44	.49	.49	.38	.45	.44	.40	.45	.43
$LNB$	Зима				–	–	–	–	.28	.27	–	–	–
	Весна				.28	.28	.31	.33	.35	.38	.28	.28	.33
	Лето				.36	.35	.34	.37	.37	.38	.36	.35	.35
	Осень				.31	.30	.32	.35	.37	.42	.31	.30	.34
$FG$	Зима							–	–	–	–	.27	.26
	Весна							–	–	–	–	–	–
	Лето							–	–	–	–	–	–
	Осень							–	–	–	–	–	–

Примечание. Значения  $PI < 0,25$  заменены прочерками;  $TR$  как единственный предиктор является незначимым во все сезоны и при всех  $I$ , соответствующая часть таблицы не приводится.

Используя для прогноза осадков (факта выпадения осадков  $I > 1$  мм/12 ч), получаем вполне значимую успешность (в рамках концепции идеального прогноза, т. е. с использованием предикторов, рассчитанных не по прогностической модели, а по данным объективного анализа) во все сезоны. Неустойчивость, в особенности в слоях большой вертикальной мощности, во многих случаях является вынужденной, причем в роли вынуждающего фактора выступает бароклинность. Зимой доля вынужденной конвективной неустойчивости достигает 39 % всех ее случаев (всего зимой повторяемость конвективной неустойчивости ( $LNB > 2$  км) составляет 23,5 %). Летом повторяемость конвективной неустойчивости близка к 40 %, из них 29 % вынужденной.

Величины  $FG$  и  $TR$  как единственные предикторы незначимы, но в сочетаниях с  $F$  и  $LNB$  (в особенности с  $F$ ) пригодны для прогноза осадков всех градаций интенсивности во все сезоны (рис. 4.12).



**Рис. 4.12.** Регионы, для которых выполнена оценка информативности диагностических характеристик (Шакина и др., 2008).

Плотность наблюдательной сети сильно различается по территории бывшей ЕТС. Различны и физико-географические, и циркуляционные условия. Для оценки различий в эффектах динамического вынуждения осадков в различных регионах мы провели расчеты по 8-летнему ряду данных по шести регионам в пределах ЕТС.

Наилучшие результаты (в смысле тесных статистических связей между диагностиками и повторяемостью осадков) получены для III региона (табл. 4.2), в котором наиболее густая сеть станций (здесь находятся Москва и Московская область) и сравнительно однородная подстилающая поверхность. Наихудшие результаты – для VI региона (Кавказ, Ставропольский край, Нижнее Поволжье) с крайне неоднородным рельефом: небольшие, но значимые  $PI$  получены здесь только для осеннего сезона в градациях  $I > 1$ ,  $I > 6$  мм/12 ч с помощью сочетаний  $F$ ,  $LNB$  и  $F$ ,  $TR$  соответственно.

Для III региона зимой и в переходные сезоны  $PI > 0,5$  для  $I > 6$  мм/12 ч как при одном предикторе  $F$ , так и при парных сочетаниях его с каждым из остальных предикторов. Летом успешность диагноза осадков ниже, максимальное  $PI = 0,382$  для  $I > 6$  мм/12 ч и пары предикторов  $F$ ,  $LNB$ .

Особенностью развитого нами подхода к диагнозу и прогнозу осадков на основе расчета диагностических характеристик динамического вынуждения осадков является то, что данному сочетанию предикторов соответствует не

одно значение вероятности осадков, а целый спектр вероятностей осадков различной интенсивности. В реальных условиях всегда реализуется в данном квадрате сетки некий набор интенсивностей осадков, включая их отсутствие на отдельных станциях. Для ряда потребителей представляет интерес не только категорический прогноз определенной интенсивности осадков, но и вероятность выпадения осадков во всем спектре их интенсивности. Полученные нами результаты могут быть использованы для такого прогноза спектра вероятностей осадков различной интенсивности.

Таблица 4.2

Критерий Пирси для одиночных диагностических характеристик и их парных сочетаний как предикторов осадков  $I > 1$  мм/12 ч,  $I > 6$  мм/12 ч,  $I > 19$  мм/12 ч для III региона (52.2—55°с.ш. 32.5—60°в.д.) ЕТС по сезонам

Пре-дик-тор	Сезон	<i>F</i>			<i>LNB</i>			<i>FG</i>			<i>TR</i>		
		>1	>6	>19	>1	>6	>19	>1	>6	>19	>1	>6	>19
<i>F</i>	Зима	.45	.54	+	.46	.55	+	.45	.56	+	.47	.56	+
	Весна	.44	.51	+	.47	.53	.60	.44	.51	+	.45	.51	+
	Лето	.30	.33	.34	.36	.38	+	.30	.33	.36	.31	.33	.35
	Осень	.43	.50	+	.46	.54	+	.44	.52	+	.45	.51	+
<i>LNB</i>	Зима				—	—	—	—	.32	+	—	—	—
	Весна				.29	.31	+	.35	.40	+	.29	.31	+
	Лето				.31	.29	.28	.33	.34	.36	.31	.30	.30
	Осень				.31	.31	+	.38	.42	+	.32	.31	+
<i>FG</i>	Зима							—	.31	+	—	.34	+
	Весна							—	.26	+	—	.34	+
	Лето							—	—	—	—	—	—
	Осень							—	.28	+	.26	.29	+

Примечание. Значения  $PI < 0,25$  заменены прочерками; *TR* как единственный предиктор является незначимым во все сезоны и при всех *I*, соответствующая часть таблицы не приводится, «+» означает, что объем выборки недостаточен для получения надежных значений  $PI$ .

Из рассмотренного примера видно, какие содержательные результаты можно получить с помощью диагностических расчетов по реальным данным. Поскольку на основании чисто динамических характеристик — даже не зависящих от влажности — можно получить значимый прогноз осадков, это показывает, что генерация вертикальных движений играет определяющую роль в процессе осадкообразования.

## Вопросы верификация численных моделей: динамическая верификация

Современные численные прогностические модели характеризуются в общем высоким уровнем точности предвычисления основных метеорологических полей. Общепринятые характеристики ошибок прогноза (средние арифмети-

ческие, средние абсолютные и среднеквадратические ошибки, коэффициенты корреляции и пр.) часто мало различаются в различных моделях современного уровня.

Перечисленные характеристики обычно рассчитываются в рамках авторских и оперативных испытаний моделей или прогностических методов. В Гидрометцентре России они рассчитываются по принятым программам в Лаборатории испытаний новых и усовершенствованных методов прогноза. Программы эти были в свое время разработаны в отделе объективного анализа Гидрометцентра и с тех пор без принципиальных изменений работают до настоящего времени. Их основным принципом является сравнение предвычисленных или прогнозируемых значений или полей с наблюдениями (наземными или аэрологическими). Сам по себе этот принцип остается правильным. Пока речь идет о верификации прогнозов в пунктах, оценкам можно доверять. Однако если речь идет о прогнозе в узлах регулярной сетки, то используемый у нас подход оказывается методически неправильным, и потому полученные в оперативных испытаниях результаты не следует принимать на веру.

Основным принципом сеточного представления метеорологических полей является то, **что изменчивостью величины в пределах квадрата сетки пренебрегают, и поле этой величины в данном квадрате сетки характеризуется одним значением, которое является средним по квадрату.** Так, если в численной модели дается прогноз ветра, или температуры, или осадков в узлах сетки, то эти прогностические значения надо понимать как средние по квадрату сетки, в центре которого находится данный узел. Именно так надо понимать результаты численного прогноза. У нас же каким-то образом утвердилось представление о том, что значения в узлах сетки относятся именно к точкам – к этим узлам. Отсюда вытекает представление о том, что для сопоставления данных численного прогноза с наблюдениями на станциях надо интерполировать предвычисленные значения с узла на станцию. Так это и делается в тех программах, которые работают в процессе оперативных испытаний. Производится билинейная интерполяция с узла на станцию.

Если в квадрате несколько станций, то получается и несколько пар значений (прогноз и факт), и несколько их разностей. Можно показать на примерах получающиеся таким путем странные выводы.

Важно не это, важно следующее принципиальное отличие общепринятого в мировой практике подхода (основанного на правильном понимании самой сущности сеточного представления величин) от охарактеризованного выше представления, а именно:

**Для оценки точности численного прогноза в квадрате сетки надо сравнить прогноз в данном узле (представляющий собой среднее по квадрату значение) со средним по квадрату наблюдаемым значением этой же величины. Это значит, что надо, наоборот, от значений на отдельных станциях перейти к среднему наблюдаемому значению в данном**



**квадрате и это среднее из наблюдаемых значений сравнить с прогнозом в данном узле.**

Тогда получается столько пар значений и столько их разностей, сколько узлов сетки в данной области.

Встает вопрос: как определять эти средние по квадрату фактические значения? Этот вопрос мы с вами разбирать не будем, но вкратце можно сказать следующее. Имеются разработанные и оперативно используемые в мировых прогностических центрах алгоритмы расчета средних по квадрату фактических значений. В основе их лежит суммирование с весом, а веса для отдельных станций задаются в соответствии со статистической структурой поля соответствующей метеорологической величины. Такая процедура носит название *criging*. В том пакете программ верификации, о котором говорил А.В. Муравьев, эта процедура задействована. Чтобы ее перенести в нашу оперативную технологию верификации, нужны дополнительные усилия.

(Заметим, что вычисление средних по квадратам сетки значений наблюдаемых величин является содержанием процедур объективного анализа.)

Но это не единственная сложность, связанная с оценкой точности численных моделей.

Другой важной проблемой является то, что простые общепринятые характеристики успешности, даже рассчитанные методически правильно, не всегда позволяют выявить недостатки и достоинства конкретной модели и правильно определить причину неточного прогноза той или иной величины. Например, из оперативных испытаний делается вывод, что зимой прогноз осадков по полулагранжевой модели лучше, чем летом, и в течение всего года лучше, чем по спектральной модели T85L31. Но из этих результатов неясно, почему это так: в чем кроются причины таких различий эффективности.

Это отчасти объясняется особенностями общепринятого подхода к задаче верификации численных моделей. Точность прогноза полей геопотенциала, температуры и ветра на всех уровнях модели, других модельных полей, таких, как осадки, обычно оценивается путем расчета ошибок прогноза каждой из этих величин, сравнивая данные объективного анализа и прогноза в узлах сетки или же данные наблюдений на станциях с данными численного прогноза. Рассчитываются средние по той или иной области значения ошибок каждого из полей; обычно у отечественных моделей ошибки несколько больше, чем у лучших моделей мирового класса, однако различия не столь велики. Такая верификация не выявляет «слабых мест» модельной динамики. Между тем такие слабые места можно идентифицировать, а значит, и дать разработчикам полезные ориентиры для работ по совершенствованию моделей. Для этого, в дополнение к стандартным процедурам расчета ошибок прогноза тех или иных метеорологических величин, целесообразно проводить расчеты динамически и физически содержательных диагностических характеристик по выходным данным моделей и сравнивать их с теми же величинами, рассчитанными по реальным данным (по объективному анализу на срок прогноза). Кроме того, необходимо сравнивать также диагностические характеристики,

рассчитанные по полям анализа различных моделей. В практике оперативных испытаний численных моделей их начальные поля (объективный анализ), как правило, не подвергаются изучению. На первый взгляд, поля давления, температуры, ветра, с которых стартуют различные модели, не сильно отличаются друг от друга (на поля влажности обычно обращают мало внимания). Однако на самом деле глубинные различия этих полей могут быть очень существенными и приводить к серьезным последствиям в качестве прогноза.

Проблемы недостаточно точного прогноза ряда явлений, в особенности высокой и экстремальной интенсивности, остаются актуальными. В частности хорошо известно, что даже в лучших прогностических моделях прогноз осадков, в особенности сильных, недостаточно успешен. Известно также, что успешность прогноза осадков определяется, с одной стороны, адекватностью модельных механизмов фазовых переходов влаги, облако- и осадкообразования, с другой – адекватностью модельных механизмов генерации вертикальных движений. Роль второго из указанных факторов нельзя недооценивать. Действительно, механизмы облако- и осадкообразования как в природе, так и в моделях включаются лишь постольку, поскольку имеют место восходящие движения. Если последние недооцениваются моделью, то, при всем совершенстве схем облако- и осадкообразования, осадки также будут недооцениваться.

Как мы видели на прошлых лекциях, первостепенную роль в процессе генерации осадков в атмосфере играют динамические факторы. При этом имеется в виду не только динамика нижней тропосферы (под нижней тропосферой мы будем понимать планетарный пограничный слой) или нижней половины тропосферы, но динамика мощного слоя, захватывающего тропопаузу и нижнюю стратосферу. Известно, например, что численные модели, в которых верхняя жесткая граница располагалась на тропопаузе, не обеспечивали успешного прогноза осадков. Между тем, хотя этот результат хорошо известен, разработчики численных моделей и в настоящее время, стремясь улучшить модельный прогноз осадков, основное внимание уделяют совершенствованию осадкообразующих механизмов, порой не слишком заботясь о деталях динамики верхней тропосферы и нижней стратосферы.

Проблема верификации приобретает особое значение в условиях, когда становится доступной прогностическая продукция целого ряда глобальных и региональных моделей, каждая из которых является, сверх того, объектом дальнейшего совершенствования. С одной стороны, разработчики моделей заинтересованы в такой верификации, которая не ограничивалась бы расчетом простейших статистических характеристик, но позволяла бы наметить пути повышения качества прогноза. С другой стороны, потребители прогностической продукции заинтересованы в количественных характеристиках конкретных моделей с точки зрения специфических прикладных задач (таких, например, как авиационный прогноз). Предлагаемый подход может быть полезен как разработчикам моделей, так и потребителям. Охарактеризуем его основные особенности.

1. Выбор системы физически содержательных диагностических характеристик, описывающих важнейшие механизмы генерации восходящих движений, которые, как известно, определяют условия облако- и осадкообразования. В данном контексте такая система диагностик включает горизонтальные градиенты толщин слоев воздуха в нижней половине тропосферы, фронтальный параметр как меру бароклинности и кривизны поля давления, уровень нулевой плавучести как меру конвективной неустойчивости сеточного масштаба, а также высоту тропопаузы и скорость ветра в струйных течениях как характеристики глубоких вертикальных циркуляций.

2. Расчет выбранных диагностик, как по прогностическим полям исследуемых моделей, так и по полям анализов, с которых стартуют модели. Как правило, в практике оценки качества прогнозов ограничиваются сравнением прогноза с наблюдениями согласно принятым алгоритмам; объективные анализы моделей остаются вне поля зрения стандартных методик оценки качества прогнозов. Между тем недостатки модельных прогнозов порой коренятся в особенностях начальных полей анализа.

3. Сравнение (1) диагностических характеристик, рассчитанных по прогностическим полям и по полям модельного анализа на срок прогноза, и (2) характеристик, рассчитанных по полям анализа различных моделей. Первый тип сравнения позволяет оценить качества прогностической схемы, в том числе степень воспроизводства бароклинных зон в нижней и верхней тропосфере, атмосферных фронтов, конвективной неустойчивости. Второй тип сравнения позволяет оценить уровень и потенциал развития динамических механизмов, которые задаются начальными условиями и тем самым влияют на результат интегрирования уравнений модели. Расчет диагностик по полям объективного анализа позволяет обнаружить существенные различия конкретных моделей.

4. Оценка распределения разностей диагностик по спектру значений последних: иначе говоря, разбиение, при выполнении обоих типов сравнения, всего диапазона изменения диагностик на интервалы в соответствии с физическим смыслом и с прикладным значением данной характеристики. Таким образом, кроме средних по всему полю значений разностей диагностик, мы получаем оценки точности модельного описания участков полей с экстремальными характеристиками (резких бароклинных зон и фронтов, интенсивных струйных течений, воронок тропопаузы). Средние по всей области характеристики (например ошибка прогноза скорости ветра) часто малоинформативны, тогда как выделение физически наиболее значимых участков поля позволяет обнаружить «слабые места» модельной динамики (которые могут быть заложены в модель уже на стадии формирования начальных условий).

Применение предлагаемого подхода, который может быть назван «динамической верификацией», к задаче анализа начальных и выходных полей отечественных глобальных моделей (СМ и ПЛМ) с целью выявления причин недостаточно успешного прогноза осадков, в особенности летних, в сравне-

нии с моделями NCEP и UKMO, дало определенные положительные результаты.

Именно, удалось обнаружить, что сравнительно невысокая успешность прогноза осадков по спектральной модели Гидрометцентра России в ее конфигурации T85L31 обусловлена, прежде всего, следующими причинами: недостатками схемы объективного анализа, с которого стартует модель (слишком сильное сглаживание бароклинических зон в нижней половине тропосферы и слишком высокая влажность на нижних уровнях) и слабой (возможно, также отчасти под влиянием начальных условий) генерацией бароклиничности во всей толще тропосферы и нижней стратосферы, проявляющейся в сильном занижении интенсивности струйных течений и сглаживании топографии тропопаузы. Слабость бароклинических механизмов генерации вертикальных движений обуславливает низкую степень реализации энергии конвективной неустойчивости, хотя ее запасы в модели очень велики из-за высокой влажности. Все это приводит к низкой повторяемости модельных осадков и большому числу непредсказанных явлений, несмотря на завышенные запасы влаги.

Необходимо отметить, что в новой версии T169L31 спектральной модели указанные недостатки динамических механизмов в значительной степени устранены.

Недостаточно успешный прогноз осадков по полулагранжевой модели, как показал наш анализ, был связан, прежде всего, с особенностями начальных условий (низкая влажность вблизи подстилающей поверхности), приводящими к занижению запасов энергии конвективной неустойчивости в анализе модели. Механизмы генерации вертикальных движений (бароклиничность, кривизна поля давления, фронтогенез) в нижней половине тропосферы воспроизводятся сравнительно адекватно. Однако глубокие тропосферно-стратосферные вертикальные циркуляции в высотных фронтальных зонах все же недооцениваются моделью (что проявляется в занижении скоростей ветра в струйных течениях и заметном сглаживании тропопаузы). Это обуславливает занижение степени реализации энергии конвективной неустойчивости, хотя генерация последней в прогностической схеме проходит достаточно успешно. В результате недооценивается повторяемость и количество осадков теплого периода.

## Заключительные замечания

Нами рассмотрены основные особенности постановки и решения задач о возникновении, развитии и свойствах волновых и вихревых движений различных масштабов в атмосфере. Эти движения, начиная с самых крупномасштабных (планетарные волны, блокирующие антициклоны) и включая процессы синоптического масштаба (гребни и ложбины, циклоны и антициклоны средних широт), интенсивные конвективные процессы и далее мезомасштабные и микромасштабные волны и турбулентные зоны – рассмотрены в их единстве (как результаты определенного типа неустойчивости воздушных потоков), своеобразии (определяемом различными соотношениями действующих сил) и взаимодействии в едином процессе энергообмена.

Все многообразие атмосферных движений и объектов принято рассматривать в единой шкале пространственных и временных масштабов. В разное время во второй половине XX столетия было предложено несколько таких шкал; по-видимому наибольшее распространение получила шкала Орлански. В приводимой на рисунке таблице показана эта шкала вместе с некоторыми другими, которые могут встретиться читателю в литературе. В верхней части таблицы, вдоль оси временных масштабов, указаны в скобках физические параметры, определяющие соответствующий временной масштаб.

Так, периодам от месяца до нескольких дней отвечает характерное время, определяемое как обратная величина произведения параметра  $\beta$  на радиус

деформации Россби  $L_R = \frac{H}{f} \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ , где  $H$  – вертикальный масштаб. Для

движений с временными масштабами от одних суток до нескольких часов характерное время равно  $f^{-1}$ . Более короткопериодным движениям можно поставить в соответствие в качестве характерного времени период Брента-

Вайсяля  $\left[ \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right]^{-\frac{1}{2}}$ . Наконец, для еще меньших масштабов характерное

время определяется как время переноса турбулентных вихрей,  $L/U$ , или как период внешних гравитационных мод  $(g/H)^{-1/2}$ .

Из таблицы видно, что общая пространственная протяженность интервалов макро-, мезо- и микромасштабов не слишком различается в различных предложенных шкалах. Трудности возникают обычно в связи с тем, что эти

интервалы слишком широки и включают много разнородных явлений. Поэтому подразделение масштабов на три части ( $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ ) оказывается удобным. Не следует, впрочем, придавать слишком большое значение формальным границам интервалов масштабов: более важным является соотношение сил, действующих в условиях конкретных процессов.

Таблица 3.1

Шкалы масштабов метеорологических явлений									
Шкалы				Линейный масштаб $L$	Временной масштаб ( $T$ )				Шкала Орлански
Япония	Стран. Европа	ГРОПЭКС	США		1 мес $(\beta L_R)^{-1}$	1 сут $(f)^{-1}$	1 ч $\left(\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^{-1/2}$	1 мин $\left(\frac{g}{H}\right)^{-1/2}, \frac{L}{U}$	
Макро-масштаб	Макро-масштаб	A	Макромасштаб	$10^4$ км	Стоячие волны	Приливные волны			Макромасштаб $\alpha$
						Бароклинные волны			$\beta$
Промежуточный масштаб		B	Макромасштаб	$2 \cdot 10^3$ км		Фронты, ураганы			Макромасштаб $\alpha$
				200 км					$\beta$
Мезомасштаб	Мезомасштаб	C	Мезомасштаб	20 км			Струи нижних уровней, линии шквалов, инерциальные волны, облачные полосы		Мезомасштаб $\beta$
									$\gamma$
		D	Мезомасштаб	2 км			Грозовые очаги, внутренние волны	Зоны турбулентности ясного неба	Мезомасштаб $\gamma$
Микромасштаб	Микромасштаб		Микромасштаб	200 м				Торнадо, смерчи	Микромасштаб $\alpha$
				20 м				Термики	$\beta$
								Султаны, турбулентность	$\gamma$

Характерные пространственные и временные размеры метеорологических явлений и объектов и принятые различными группами метеорологов границы масштабов метеорологических полей (Шакина, 1985).

Так, для макромасштабных объектов (циклонов и антициклонов, гребней и ложбин) наибольшее значение имеет приближенное равновесие между силой Кориолиса и силой градиента давления. Источником кинетической энергии этих движений является потенциальная энергия горизонтальных контрастов температуры. Вертикальные скорости частиц малы в сравнении с горизонтальными. Для  $\beta$  и  $\gamma$ -мезомасштабных и микромасштабных явлений важнейшую роль играет сила плавучести, а влияние силы Кориолиса уменьшается и меняется качественно. Явления мезомасштаба  $\alpha$ , называемого также промежуточным масштабом, в динамическом отношении мало отличаются от  $\beta$ -макромасштабных. Кроме фронтов и небольшого размера циклонов сюда же входят такие объекты, как потоки типа «несущей полосы» в циклонах, складки и воронки тропопаузы.

В заключение заметим также следующее. Все основные достижения динамической метеорологии, ее фундаментальные результаты получены в XX столетии. (Это было видно и по цитированным выше работам, содержащим основные теоремы и модели.). На созданном в этот период строгом гидродинамическом фундаменте в настоящее время развиваются преимущественно такие научные направления, целью которых является детализация, уточнение ранее полученных результатов, изучение тонких структур и количественных соотношений методами численного моделирования, диагностических расчетов, а также измерений новыми техническими средствами. Синтез полученных такими путями выводов формирует все более полное представление о процессах в толще тропосферы и стратосферы. Непосредственным прикладным результатом этого становится развитие все более совершенных численных прогностических моделей атмосферных процессов и погодных явлений.

## Литература

- Борисова В.В., Шакина Н.П.* Использование потенциального вихря Эртеля для расчета высоты и температуры тропопаузы // Труды Гидрометцентра СССР. 1989. Вып. 305. С. 98–117.
- Ветлов И.П., Петренко Н.В.* Осадки холодных фронтов в центральной части европейской территории СССР в теплое время года. Л.: Гидрометеиздат, 1955. 64 с.
- Винниченко Н.К., Пинус Н.З., Шмелер С.М., Шур Г.Н.* Турбулентность в свободной атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 335 с.
- Гандин Л.С., Лайхтман Д.Л., Матвеев Л.Т., Юдин М.И.* Основы динамической метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1955. 647 с.
- Груза Г. В., Коровкина Л. В.* Сезонный ход пространственного распределения индексов блокирования в северном полушарии // Метеорология и гидрология. 2010а. № 3. С. 108–110.
- Груза Г. В., Коровкина Л. В.* Климатический мониторинг процессов, блокирующих западный перенос в северном полушарии // Метеорология и гидрология. 2010б. № 8. С. 11–18.
- Дженкинс П., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. В 2-х т. М.: Мир, 1971. 320 с. (т.1), 285 с. (т.2).
- Желнин А.А., Старостин А.Н.* Сверхкраткосрочный прогноз и проблема предсказуемости мезомасштабных атмосферных процессов // Метеорология и гидрология. 1987. № 10. С. 5–13.
- Коган З.Н., Шакина Н.П.* Волны конечной амплитуды в стратифицированном струйном течении и турбулентность ясного неба // Изв. АН СССР. ФАО. 1974. № 4. С. 333–343.
- Куценко Б.Я.* Численное исследование фронтогенеза с учетом фазовых переходов // Метеорология и гидрология. 1981. № 9. С. 23–34.
- Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 320 с.
- Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. В 2-х т. М.: Мир, 1984. 398 с. (т.1), 416 с. (т.2).
- Скриптунова Е.Н.* Начальный рост циклонических вихрей в баротропно- и бароклинно-неустойчивых слоях // Труды Гидрометцентра СССР. 1982. Вып. 260. С. 44–53.
- Федченко Л.М., Гораль Г.Г., Беленцова В.А., Мальбахова Н.Н.* Опасные конвективные явления и их прогноз в условиях сложного рельефа. М.: Гидрометеиздат, 1991. 425 с.
- Халтинер Дж., Мартин Ф.* Динамическая и физическая метеорология. М.: ИЛ, 1960. 435 с.
- Шакина Н.П.* Динамика атмосферных фронтов и циклонов. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 262 с.
- Шакина Н.П.* Гидродинамическая неустойчивость в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 308 с.
- Шакина Н.П., Скриптунова Е.Н., Иванова А.Р.* Прогностическая значимость динамических факторов генерации осадков // Метеорология и гидрология. 2008. № 4. С. 5–18.
- Шмелер С.М.* Термодинамика и физика конвективных облаков. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 267 с.
- Benard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid // Rev. Gen. Sci. Pures et Appl. 1900. V. 11. P. 1261–1328.
- Blumen W.* A comparison between the Hoskins-Bretherton model of frontogenesis and the analysis of an intense surface frontal zone // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. No. 1. P. 64–77.
- Browning K.A.* Mesoscale structure of rain systems in the British Isles // J. Met. Soc. Japan. 1974. V. 52. No. 3. P. 314–327.
- Browning K.A.* Conceptual models of precipitation systems // Met. Mag. 1985. No. 114. P. 293–319.



- Browning K.A., Harrold T.W.* Air motion and precipitation growth in a wave depression // Q. J. Roy. Met. Soc. 1969. V. 95. No. 404. P. 288–309.
- Browning K.A., Hardman M.E., Harrold T.W., Pardoe C.W.* The structure of rainbands within a mid-latitude depression // Q. J. Roy. Met. Soc. 1973. V. 99. P.215–312.
- Carlson T.N.* Midlatitude weather systems. London: HarperCollins Academic, 1991. 507 c.
- Charney J.G.* The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current // J. Meteorol. 1947. V. 4. No. 5. P. 135–162.
- Clarke L., Renard R.L.* The US Navy numerical frontal analysis scheme: further development and limited evaluation // J. Appl. Meteorol.. 1966. V. 5, P. 764–777.
- Eady E.T.* Long waves and cyclone waves // Tellus. 1949. V. 1. No. 3. P. 35–52.
- Eliassen A.* On the vertical circulation in frontal zones // Geofys. Publ. 1962. V. 24. No. 4. P. 147–160.
- Emmanuel K.A.* Atmospheric convection. Oxford Univ. Press, 1994, 580 p.
- Eliassen A.* The formation of fronts in the atmosphere / *Atm. and Sea in Motion*. B. Bolin, Ed. Rockefeller Inst. Press, 1959. P. 277–287.
- Green J.S.* F problem in baroclinic instability // Q. J. Roy. Met. Soc. 1964. V. 86. No. 368. P. 237–251.
- Haltiner G.J., Williams R.T.* Numerical prediction and dynamic meteorology. New York: JOHN WILEY & SONS, 1980. 477 p.
- Hoinka K.P.* Statistics of the global tropopause pressure // Mon. Weather Rev. 1998, V. 126. P. 3303–3325
- Holton J.R., Haynes P.H., McIntyre M.E., Douglass A.R., Rood R.B., Pfister L.* Stratosphere-troposphere exchange // Rev. Geophys. 1995. V. 33. No. 4. P. 403–439.
- Hoskins B.J.* Atmospheric frontogenesis models: some solutions // Q. J. Roy. Met. Soc. 1971. V. 97. P. 139–153.
- Hoskins B.J., Bretherton F.P.* Atmospheric frontogenesis models: mathematical formulation and solutions // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. No. 1. P. 11–37.
- Hoskins B.J., Hollingsworth A.* On the simplest example of the barotropic instability of Rossby wave motion // J. Atmos. Sci. 1973. V. 30. P. 150–153.
- Hoskins B.J., Draghiči, Davies H.C.* A new look at the  $\omega$ -equation // Q. J. Roy. Met. Soc. 1978. V. 104. No. 439. P. 31–38.
- Howard L.N.* Note on a paper of John W. Miles // Fluid Mech. 1961. V. 10. No. 4. P. 509–512.
- Huber-Pock F., Kress Ch.* An operational model of objective frontal analysis based on ECMWF products // Meteorol. Atmos. Phys. 1989. V. 40. No. 2. P. 1270–180.
- Kuo H.-L.* Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere // J. Meteorol. 1949. V. 6. No. 2. P. 105–295.
- Kuo H.-L.* Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory // Adv. Appl. Mech. 1973. V. 13. P. 248–329.
- Lilly D.K., Toutenhoofd W.* The Colorado lee wave program // Proceedings of the Symposium on Clear Air Turbulence and Its Detection, Seattle, Washington, August 14-16, 1968. New York: Plenum Press, 1969. P. 232–245.
- Lipps F.B.* The barotropic stability of the mean wind in the atmosphere // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. No. 3. P. 397–407.
- Lorenz E.N.* Barotropic instability of Rossby wave motion // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. P. 258–264.
- Miles J.W.* On the stability of heterogeneous shear flow // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. No. 4. P. 496–509.

- Miller J.E.* On the concept of frontogenesis // J. Met. 1948. V. 5. No. 4. P. 169–171.
- Mudrick S.E.* A numerical study of frontogenesis // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. No. 4. P. 869–892.
- Pedlosky J.* The stability of currents in the atmosphere and ocean: Part 1 // J. Atmos. Sci. 1964. V. 21. No. 2. P. 201–219.
- Pelly J.L., Hoskins B.J.* A new perspective on blocking // J Atmos. Sci. 2003a. V. 60. No. 3. P. 743–755.
- Pelly J. L., Hoskins B.J.* How well does the ECMWF ensemble prediction system predict blocking? // Q. J. Roy. Met. Soc. 2003b. V. 129. P. 1683–1702.
- Phillips N.A.* Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model // Tellus. 1954. V. 6. No. 3. P. 273–286.
- Rayleigh J.S.W.* On the stability or instability of certain fluid motions // Proc. London Math. Soc. 1880. V. 9. P. 57–70.
- Reed R.J., Danielsen E.F.* Fronts in the vicinity of the tropopause // Arch. Met. Geophys. Bioclim. 1959. V. A8. No. 1. P. 1–17.
- Rex D.F.* Blocking action in the middle troposphere and its effects on regional climate. II. The climatology of blocking action // Tellus. 1950. V. 3. P. 275–301.
- Sanders F.* Investigation of the structure and dynamics of an intense surface frontal zone // J. Met. 1955. V. 12. No. 6. P. 542–552.
- Sawyer J.S.* Dynamical aspects of some simple frontal models // Q. J. Roy. Met. Soc. 1952. V. 78. P. 170–178.
- Sawyer J.S.* The vertical circulation at the meteorological fronts and its relation to frontogenesis // Proc. R. Soc. London. 1956. V. A234. P. 346–362.
- Shakina N.P., Postnov A.A., Lyakhov A.A.* Layered sloping mesoscale structures and rainbands in atmospheric frontal regions and their relation to symmetric instability // Proc. Nowcasting-2 Symp. 1984 (ESA SP-208). P. 57–62.
- Shapiro M.A.* Turbulent mixing within tropopause folds as a mechanism for the exchange of chemical constituents between the stratosphere and troposphere // J. Atmos. Sci. 1980. V. 37. P. 994–1004.
- Shapiro M.A., Reiter E.R., Cadle R.D., Sedlacek W.A.* Vertical mass- and trace consistent transport in the vicinity of jet streams // Arch. Met. Geophys. Bioclim. 1980. V. B28. No. 3. P. 193–206.
- Squire H.B.* On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. A. 1933. V. 142. P. 621–628.
- Stone P.H.* Frontogenesis by horizontal wind deformation fields // J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. No. 5. P. 455–465.
- Stone P.H.* On nongeostrophic baroclinic stability. Part II // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. No. 5. P. 721–726.
- Stone P.H.* Baroclinic instability under non-hydrostatic conditions // J. Fluid Mech. 1971. V. 45. P. 659–672.
- Tibaldi S., Molteni F.* On the operational predictability of blocking // Tellus. 1990. V. 42A. P. 343–365.
- Tsai C.-Y., Kao S.-K.* Linear and non-linear contributions to the growth and decay of the large-scale atmospheric waves and jet streams // Tellus. 1978. V. 30. No. 1. P. 1–14.
- Williams R.T.* Quasi-geostrophic versus non-geostrophic frontogenesis // J. Atmos. Sci. 1972. V. 29. No. 1. P. 3–10.
- Van der Hoven J.* Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour // J. Met. 1957. V. 14. No. 2. P. 160–164.

## Содержание

Предисловие.....	3
------------------	---

1. Основные понятия.....	4
--------------------------	---

Силы, действующие в атмосфере (4). Уравнения динамики атмосферы (6). Геострофический ветер (7). Соотношение сил. Безразмерные параметры (8). Линеаризация уравнений. Приближение Буссинеска (10). Энтропия и потенциальная температура (12). Геопотенциал (13). Абсолютный вихрь – инвариант баротропного движения (16). Квазигеострофическое движение и его инвариант (17). Примитивные (полные) уравнения и потенциальный вихрь Эртеля (17). Виды энергии частиц воздуха (18).

2. Проявления неустойчивости в атмосфере: волны, вихри, конвекция.....	21
--	----

Определения (21). Задача о баротропной неустойчивости на  $\beta$ -плоскости. Волны Россби (24). Фундаментальные особенности задач об устойчивости на примере задачи Рэлея (33). Теоремы Сквайра и Говарда (35). Бароклиная неустойчивость зональных потоков на  $f$ -плоскости: простейшая модель циклогенеза (модель Иди) (38). Бароклиная неустойчивость на  $\beta$ -плоскости. Волны Чарни и Грина (45). Двухслойная задача о бароклиной неустойчивости (54). Блокирующие антициклоны: определения, сезонный ход и географическое распределение (61). Нелинейные эффекты бароклиной неустойчивости: качественная характеристика (64). Полностью развитые нелинейные режимы (69). Инерциальные волны. Симметричная неустойчивость (72). Собственно симметричная неустойчивость (75). Условная симметричная неустойчивость (77). Метеорологический контекст задачи о симметричной неустойчивости (78). Конвективная неустойчивость в покоящемся слое. Гравитационные волны (81). Конвективная неустойчивость плоскопараллельного потока со сдвигом ветра. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (84). Характеристики конвективной неустойчивости в атмосфере (89).

<b>3. Неоднородная адвекция. Атмосферные фронты, фронтогенез и фронтолиз.....</b>	<b>96</b>
<p>Определения. Термически прямые и термически обратные циркуляции (96). Модель фронта как поверхности раздела воздушных масс. Формула Маргулеса (103). Модели возникновения узких зон фронтов (105).</p>	
<b>4. Анализ реальных данных с позиций динамики атмосферы.....</b>	<b>114</b>
<p>Спектральный анализ. Спектры энергии атмосферных движений (114). Изэнтропический анализ (119). Понятие динамической тропопаузы (120). Мезомасштабная структура циклонов (122). Поиск прогностических связей по реальным и модельным данным (128). Пример постпроцессинга: выделение зон фронтов. Мера субъективизма при проведении фронтов синоптиком (129). Диагностические расчеты: факторы вынуждения осадков (141). Вопросы верификации численных моделей: динамическая верификация (147).</p>	
<b>Заключительные замечания.....</b>	<b>153</b>
<b>Литература.....</b>	<b>156</b>